Índice

CAPÍTULO 1

Introdução

Como já é sabido, as ideias geométricas são úteis na representação e na resolução de problemas de outras áreas de matemática e de situações reais. A construção e a manipulação mentais de objectos a duas e três dimensões são um aspecto importante do pensamento geométrico. A geometria é mais do que definições; deve contemplar a descrição de relações e de raciocínio, a construção de justificações e de demonstrações.

O presente trabalho "Transformações geométricas no plano: e seu ensino no 1° ciclo" insere-se na linha de pesquisa " Uma abordagem proposta para o ensino das transformações geométricas no ensino secundário" que pensamos vir a desenvolver no âmbito Profissional.

Um dos objectivos é contribuir para uma reflexão sobre o processo ensino/aprendizagem da geometria no ensino secundário em particular, e na disciplina de matemática, em geral.

Ao longo da nossa experiência como docente, observamos uma certa ausência do ensino da geometria nas escolas, com reflexos nocivos no conhecimento dos docentes em exercício e não só, bem como nos discentes; embora essa matéria conste aos programas. Há fortes indícios que os conteúdos de geometria que não foram apreendidos pelos docentes e por essa razão, também não são ensinados, dando origem a um ciclo vicioso, que acaba afectando gerações de alunos, que ficam sem aprender geometria.

Os que leccionam alguma geometria acabam por adoptar uma abordagem mais tradicional, com nomenclatura, classificações e propriedade deduzida em figuras estáticas, em posições estandardizadas. Exceptuam-se algumas tentativas de inovações, com o uso de tangrans, geoplanos e outros matérias, mas o trabalho, com transformações geométricas, que vem sendo indicado como de grande interessante e rico eixo orientador de estudos em geometria, é pouco conhecido e pouco utilizado no nosso desenvolvimento curricular.

Sendo assim a opção pelo tema "Transformação geométricas: e seu ensino no 1° ciclo" deve-se à nossa vontade de realizar um trabalho com carácter científico-pedagógico, com o fim de facultar tanto aos alunos como aos professores de Matemática e Educação Visual e Tecnológica, material de apoio, tão importante nessa área.

Assim no segundo capítulo, apresentamos uma análise histórica e epistemológica das transformações geométricas destacando as vertentes geométrica e algébrica das transformações geométricas. Daí, optamos, por uma descrição sucinta de alguns aspectos da construção histórica da geometria das transformações, destacando o Programa Erlanger de Felix Klein e o desenvolvimento epistemológico das transformações geométricas.

No terceiro capítulo, analisamos investigações e pesquisas sobre as transformações geométricas que incidem sobre as concepções e fundamentações teóricas do tema, de modo a permitir aos leitores uma certa clareza sobre eventuais obstáculos à apreensão dos principais conceitos, teoremas, propriedades etc.

No quarto capítulo, fazemos uma análise do tema como é proposto em currículos oficiais com intuito de nos permitir avaliar as mudanças no processo ensino/aprendizagem e algumas perspectivas de abordagens do assunto. A análise de alguns materiais didácticos mais recentes também nos indica algumas perspectivas de abordagens do tema.

No quinto e ultimo capítulo, sugerimos uma opção metodológica, segundo a qual, num trabalho em que o professor se deve apropriar dos principais conceitos e procedimentos relativos à geometria no plano, ao mesmo tempo, possa discutir situações que orientem os estudantes na sala de aula no sentido da aprendizagem das transformações geométricas, recorrendo ao uso do programa Cabri Geometre II.

Durante a execução do presente trabalho utilizamos, sempre que possível o programa Cabri -Geometri II na investigação e confecção das figuras geométricas estudadas, afim de ilustrar conceitos ou apresentar exemplos.

CAPÍTULO 2

Breves considerações histórico-filosóficas

No presente capítulo descrevemos sucintamente alguns aspectos da construção histórica da geometria das transformações, destacando o Programa de Erlanger de Felix Klein e o desenvolvimento epistemológico do conceito das transformações geométricas tendo em conta as suas dimensões geométrica e algébrica.

2.1 Contexto histórico de "Geometria das transformações"

A geometria é um dos ramos mais antigos da matemática. Não é conhecida a data exacta em que ela começou a ser estudada. Já na arte pré-histórica se encontravam círculos, rectângulos, triângulos, varias formas que surgem na natureza, como em inúmeros cristais, tão geometricamente perfeitos.

A geometria, que serviu para que os homens fizessem desenhos e objectos de arte primitiva, foi denominada "geometria subconsciente" por Eves [15]. Derivou de simples observações de como reconhecer configurações, comparar formas e tamanhos de objectos.

Através de um estudo mais aturado sobre objectos concretos e particulares, o homem passou a conceber propriedades e relações mais gerais, em que noções primitivas foram conscientemente organizadas num conjunto de regras gerais. Assim, a geometria passou a ser, segundo Eves [15], uma "geometria científica".

Foram os gregos quem deram à geometria o carácter de ciência, insistindo que os conhecimentos geométricos, herdados de civilizações anteriores, deveriam ser apresentados sobre uma base racional (lógica) e não por procedimentos empíricos. Desenvolveram a noção de discurso lógico como um conjunto hierarquizado de proposições obtidas através do raciocínio dedutivo a partir de afirmações iniciais, chamadas axiomas ou postulados.

A geometria dedutiva começou a surgir com as proposições apresentadas em cadeias, em que umas eram derivadas de outras anteriores.

A transformação operada pela geometria grega provavelmente começou com o trabalho de Thales de Mileto (624 a.c.-548 a.C.). O primeiro procedimento lógico surgiu com os resultados desse geómetra, que apesar de elementares, representaram o primeiro pensamento dedutivo em matemática.

Também a obra de Euclides, sem dúvida, foi a contribuição mais importante da Antiguidade para a metodologia das ciências e influenciou durante vários séculos a Matemática. Até o século XVIII, a geometria dominante foi a euclidiana, dita clássica. Somente no século XIX ocorreu uma grande mudança no significado atribuído à geometria, que veremos na subsecção seguinte.

O procedimento usado por Euclides foi questionado posteriormente pelos matemáticos. Além disso, algumas definições sofreram objecções, justamente por Euclides ter tentado definir todos os conceitos sem admitir conceitos primitivos, o que é impossível de se fazer. Nesse aspecto, a concepção grega difere da concepção moderna de método axiomático, pois, "para os gregos, a geometria não era exactamente um estudo abstracto, mas uma tentativa de análise lógica do espaço físico idealizado" (Eves [15]).

2.2 Programa Erlanger e as transformações geométricas

O percursor do estudo da geometria baseado em grupos de transformações, foi Félix Klein (1849-1925) matemático alemão, quem apresentou e impressionou a comunidade matemática com as possibilidades unificadoras do conceito do grupo. Dedicou-se a desenvolver, aplicar e popularizar essa noção divida a Galois. Numa aula inaugural em 1872, quando se tornou professor na Universidade de Erlanger, Klein mostrou como o conceito de grupo podia ser aplicado para caracterizar as diferentes geometrias elaboradas até o século

XIX, na conferência que ficou conhecido como Programa Erlanger. Pois, a classificação dos grupos de transformações simplifica e coordena o estudo das propriedades geométricas de figuras, clarifica ligações entre vários campos da geometria e constitui um método fecundo de pesquisa.

Segundo Collette [12] o aparecimento das geometrias não-euclidianas, constitui uma etapa importante na génese do Programa Erlanger. Julga-se ser Klein quem destacou a natureza projectiva das geometrias não-euclideanas, estabelecendo que as três geometrias, a euclidiana, a hiperbólica de Gauss, Bolyai e Lobachevsky e a Riemann, eram casos particulares da geometria projectiva é independente da teoria das paralelas.

Piaget e Garcia (1987) [12], consideram que as transformações utilizadas até então tinham origem intuitiva, e para cada caso particular era aplicado um tipo de transformação, carecendo-se de meios para identificar e exprimir a estrutura do seu conjunto, o que é feito com a teoria dos grupos. O grande mérito de Klein foi ter concebido a relação entre uma geometria e seu grupo, tendo destacado o papel do grupo e os diversos espaços onde actua.

De acordo com Félix Klein:

"*Há transformações do espaço que não alteram em nada as propriedades geométricas das figuras. Em contrapartida, estas propriedades são, com efeito, independentes da situação ocupada no espaço pela figura considerada, da sua grandeza absoluta, e finalmente também do sentido em que estão dispostas as suas partes. Os deslocamentos do espaço, as suas transformações por semelhança e por simetria não alteram, por isso, as propriedades das figuras, ou não alteram mais do que as transformações compostas pelas precedentes. Designaremos por grupo principal de transformação do espaço o conjunto de todas estas transformações; as propriedades geométricas não são alteradas pelas transformações do grupo principal. A recíproca é igualmente verdadeira: as propriedades geométricas são caracterizadas pela sua invariancia relativamente as transformações do grupo principal. Com efeito, se considerar um instante o espaço como uma multiplicidade fixa, cada figura possui uma individualidade própria propriedade que ela possui como individuo, apenas aquelas que as transformações do grupo principal não alteram, são propriamente geométricas (Piaget & Garcia, p.106)*".

Klein juntamente com o norueguês Sophus Lie (1842-1899), tornou-se responsável pela concepção moderna da geometria.

O geómetra grego, Euclides já tinha estabelecido a igualdade de figuras por sobreposição, o que significa que as figuras permanecem invariantes quando deslocadas no plano. Isso equivale a considerar as transformações chamadas rígidas, obtidas a partir de translações, rotações, simetrias e de suas composições, como constituindo um grupo de transformações.

Podemos constatar que, o programa de Erlanger induz os matemáticos a um grande interesse pelos diferentes conjuntos de transformações, particularmente pelo das isometrias, por ser próprio da geometria euclidiana.

2.3 Algumas considerações epistemológicas sobre as transformações geométricas

Num estudo epistemológico das transformações geométricas, Piaget e Garcia [12] investigaram as ideias subjacentes às transformações geométricas, e porque durante um certo período não se desenvolveram, permanecendo em estado latente durante séculos. Segundo eles, embora as primeiras ideias de transformação sejam encontradas entre os gregos, foram necessários mais de 2.000 anos para que fossem incorporadas à geometria. Eles supuseram que, tal demora foi devido ao fraco desenvolvimento dos outros conceitos ou métodos. Ainda sublinham que "a noção de transformação só aparece claramente com álgebra e a analise, e que estas disciplinas apenas se desenvolveram a partir do século XVI e XVII" (Piaget & Garcia, p.104).

Ambos consideram que a origem da noção de transformação geométrica se encontra, indiscutivelmente, na geometria analítica e cálculo infinitesimal.

Foi necessário esperar os avanços da álgebra, do cálculo e da própria geometria para que se pudesse progredir nos conceitos iniciados por Monge e sistematizado por Poncelet e Chasles.

Piaget e Garcia relatam que só no século XVIII, Euler (1707-1783) mostra como os movimentos e as simetrias das figuras estão ligados ao problema da mudança dos eixos de coordenadas, e como a simetria pode ser traduzida analiticamente. Euler demonstra que um deslocamento plano é uma rotação ou uma translação seguida de uma reflexão. Assim, a interacção dos três campos vai proporcionar o grande avanço da Matemática do século XIX.

Destacam, ainda que o lapso de mais de 2000 anos, necessário para que o conceito de transformações geométricas adquirisse a importância que hoje, é dada no estudo das geometrias, reflecte a necessidade de uma "maturação", proporcionada por novas aquisições e métodos, para que haja pleno crescimento de uma noção.

De acordo com Collette (1985), a partir do Programa Erlanger iniciase uma etapa na Matemática em que fica evidente o domínio da teoria dos grupos e a interacção dos conceitos originais da álgebra, da geometria e da analise, tendências presentes actualmente nas matemáticas.

Podemos constatar, que a evolução dos conceitos geométricos não significou apenas acréscimo de conhecimentos, mas uma reinterpretação total dos fundamentos conceptuais, indicando que o desenvolvimento cognitivo nunca é linear e exige uma reconstrução e uma reorganização de conhecimentos por outro ponto de vista, proporcionado por novas aquisições.

Do mesmo modo, o ensino das transformações geométricas não significa apenas mais conteúdos matemáticas mas fundamentalmente a reinterpretação da geometria e a aquisição de capacidade de relacionar e estruturar.

CAPÍTULO 3

As transformações geométricas: fundamentos

Este capítulo revisita a geometria euclidiana no plano, usando para isso os conceitos ligados às transformações geométricas, mais precisamente as isometrias. As transformações proporcionam uma visão moderna[1], menos estática e também mais integrada da geometria. Proporcionam ainda o aparecimento de novos conceitos, hoje considerados muito importantes, como os de simetria, ou a utilização da noção de grupo.

Neste capítulo seguimos de perto os clássicos sobre a matéria, como [7], por exemplo, com o intuito de, manter a notação standard e ao mesmo tempo poupar os leitores a dispersão por obras nem sempre fáceis de adquirir.

Iniciamos a fundamentação teórica do tema em estudo, detendo-nos um pouco sobre o termo "transformação". Uma vez que se encontra intimamente ligada a quase todas as "questões" matemáticas, a palavra "transformação" significa transformar, isto é, passar de uma forma para outra, de um objecto para outro. Tem-se a

Definição 3.1 *Uma transformação T de um conjunto A é uma aplicação bijectiva de A em A.*

Exemplo 3.1 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, *T é uma permutação de A. EntãoT é uma transformação de A.*

Exemplo 3.2 *A é o conjunto dos pontos do triangulo $\triangle [WXY]$ do plano α. T é uma translação de $\triangle [WXY]$. Então T é uma transformação.*

[1] No sentido da Matemática Moderna.

3.1 Transformação geométrica no plano

Como sabemos os objectos materiais podem mover-se. O estudo dos seus movimentos chama-se cinemática (do grego kinema, "movimento"), mas as figuras geométricas não se movem: existe um estado inicial (o objecto) e o estado final (a imagem). O que interessa nas figuras, quando há duas ou mais simultaneamente em presença, é o modo como elas se correspondem. No ensino básico e no secundário estudamos as correspondências ponto por ponto, ou transformações pontuais, que de seguida vamos aprofundar, mas há outras que vamos abordar mais à frente "grupos de transformações".

Definição 3.2 ***Transformação geométrica ou pontual T*** *é uma aplicação de um conjunto de pontos ξ noutro conjunto de pontos ε. Por ser uma correspondência unívoca*

$$\forall P \in \xi \exists^1 P' \in \varepsilon : P' = T(P)$$

Definição 3.3 ***Transformação geométrica no plano*** *é uma aplicação bijectiva do conjunto de pontos do plano em si mesmo.*

Como exemplos de transformações no plano euclidiano temos as reflexões em rectas (simetrias axiais), translações, rotações, reflexões centrais (simetrias centrais) e homotetias. Mas o nosso estudo centraliza-se sobre as isometrias no plano $\mathbb{R}^2$.

Para estudar o conjunto das transformações no plano e sua estrutura, define-se:

Definição 3.4 ***Transformação identidade*** *Um transformação*

$$Id_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$$

é dita identidade se:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, Id_{\mathbb{R}^2}(x) = x.$$

Definição 3.5 *Sendo $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ uma transformação de $\mathbb{R}^2$, a inversa de T é a função T^{-1} tal que*

$$T \circ T^{-1} = Id_{\mathbb{R}^2}$$

3.1.1 Isometrias Planas

Nesta subsecção vamos definir as isometrias planas. Foram introduzidas nos livros escolares pela reforma dita "da matemática moderna". Na sequência do movimento estruturalista denominado N. Bourbaki que surgiu em França nos anos 30 do século passado, deduziu-se que toda a matemática deveria ser reformada passando a dar ênfase não aos objectos mas às relações, isto é, as estruturas. A introdução da nova estruturação da matemática, seguida da nova fundamentação (baseada na teoria dos conjuntos e nas estruturas) denominou-se **matemática moderna** que a Portugal (e Cabo Verde) só chegaria nos princípios dos anos 70 do século passado. Veremos que são: as reflexões, as translações, as rotações, e as reflexões com deslizamentos, elas permitem-nos estabelecer uma correspondência entre duas figuras com as mesmas medidas, e um dos nossos objectivos é classifica-las.

Definição 3.6 *Sendo ξ um conjunto não vazio, dizemos que ξ é um espaço métrico se, e somente se, existe uma função $d : \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\xi} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $X, Y, Z \in \xi$, se tem:*
(d_1) $d(X,Y) \geq 0$ *(não negativa);*
(d_2) $d(X,Y) = 0$ *sse* $X = Y$ *(propriedade de anulamento);*
(d_3) $d(X,Y) = d(Y,X)$ *(simetria);*
(d_4) $d(X,Y) + d(Y,Z) \geq d(X,Z)$ *(desigualdade triangular); a função d é uma distância em ξ. Notaremos tal espaço por (ξ, d), e será chamado um espaço métrico.*

Definição 3.7 *Uma isometria[2] num espaço métrico é uma transformação que preserva a distância entre pontos quaisquer de ξ, ou seja, $\Gamma : \xi \to \xi$ é uma isometria se, e somente se, dados P e Q arbitrários em ξ , se tem:*

$$d(P,Q) = d(\Gamma P, \Gamma Q).$$

O plano euclidiano notado por ξ^2 é o plano $\mathbb{R}^2$, com a distância (euclidiana) d dada por:

$$d(X,Y) = \sqrt{(y_{1-}x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2},$$

onde $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$.

[2] Etimologicamente o termo "isometria " significa " a mesma medida"

Definição 3.8 ***Isometria ou movimento rígido*** *é uma aplicação* Γ *do conjunto dos pontos no conjunto dos pontos que conserva e as distâncias entre pontos ou seja, a distância entre dois pontos é igual a distância entre seus pontos imagens pela transformação.*

Isto é, tal que para quaisquer pontos $P, Q \in \mathbb{R}^2$ *se tem*

$$\begin{array}{rcl} \Gamma & : & \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2 \\ X & \mapsto & \Gamma(X) \end{array}$$

tal que

$$d(P,Q) = d(\Gamma P, \Gamma Q), \forall P, Q \in X \subset \mathbb{R}^2$$

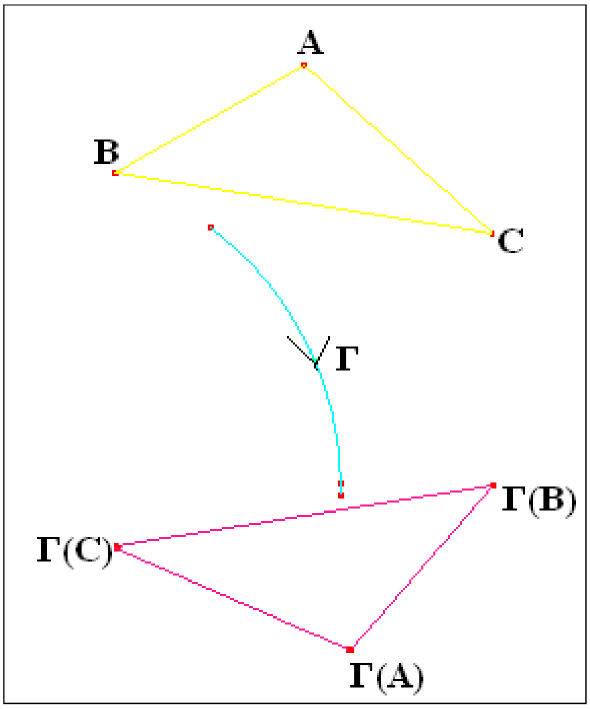


Figura 3.1:

Vejamos a seguir algumas proposições (propriedades) importantes das isometrias planas acompanhadas das suas respectivas demonstrações e algumas definições necessárias:

Definição 3.9 *Três pontos* A, B, C *dizem-se* ***colineares*** *se existem uma recta* r *tal que* $A, B, C \in r$.

Definição 3.10 *(**Relação estar entre**), dados três pontos A, B, C pertencentes à recta r e sendo F um sistema de coordenada*[3] *para r , diz-se que B está entre A e C se $F(A) < F(B) < F(C)$. Nesse caso escreve-se $A - B - C$.*

Definição 3.11 *Duas rectas r e s dizem-se **paralelas** ($r \| s$) sse $r \cap s = \varnothing$;*

Propriedades básicas:

Seja $\Gamma : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ uma isometria. Então valem as proposições:

Proposição 3.1 *Γ é injectiva;*

Demonstração:

Sejam os pontos $X, Y \in \mathbb{R}^2$ tais que $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$, então $d(\Gamma(X), \Gamma(Y)) = 0$, mas como Γ é uma isometria, temos:

$d(\Gamma(X), \Gamma(Y)) = 0 = d(X, Y)$, donde $X = Y$ por 3.6(d_2) .

Logo, Γ é injectiva.$\square$

Proposição 3.2 *Γ preserva a colinearidade de pontos;*

Demonstração:

Sejam A, B, C três pontos distintos em $\mathbb{R}^2$;

Se $A - B - C$, então $AB + BC = AC$, donde resulta $A'B' + B'C' = A'C'$; como A, B e C são distintos, também A', B' e C' são distintos por 3.1, e por 3.6(d_4), são colineares, logo $A' - B' - C'$. Analogamente, se $A' - B' - C'$, então $A - B - C$. A segunda parte resulta da primeira, se nos lembrarmos que, de três pontos sobre uma linha recta, um e um só deles esta entre os outros dois, pela definição 3.10.$\square$

Proposição 3.3 *Γ transforma rectas em rectas;*

Demonstração:

De 3.1 foi provado que Γ é injectiva, então temos de mostrar que Γ é sobrejectiva:

Seja $Y \in \mathbb{R}^2$ devemos mostrar que existe $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $\Gamma(X) = X' = Y$;

---

[3] recorde-se que um sistema de coordenadas para a recta r é uma bijecçao $F : \mathbb{R} \to r = \overleftrightarrow{OP}$ tal que $F(0) = 0$ e $F(P) > 0$.

De facto, seja $Y \in \mathbb{R}^2$ e sejam $A, B \in \mathbb{R}^2$ tais que $\Gamma(A), \Gamma(B)$ e Y não são colineares, considere $C \in \mathbb{R}^2$ tal que $d(A,C) = d(\Gamma(A), Y)$, A, B e C não são colineares e $d(B, C') = d(\Gamma(B), Y)$.

Como A, B e C são não colineares, então as intersecções do circulo de centro A e raio $\|AC\|$ com o circulo de centro B e raio $\|BC\|$ são exactamente os pontos C e C', ou seja, $C(A, \|AC\|) \cap C(B, \|BC\|) = \{C, C'\}$. Temos também que $d(A, C') = d(A, C)$ e $d(B, C') = d(B, C)$.

Analogamente,

$$C(\Gamma(A), \|\Gamma(A)Y\|) \cap C(\Gamma(B), \|\Gamma(B)Y\|) = \{Y, Y'\}$$

onde

$$\begin{aligned} d(\Gamma(A), Y) &= d(\Gamma(A), Y') \\ d(\Gamma(B), Y) &= d(\Gamma(B), Y') \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(\Gamma(A), Y) &= d(A, C) = d(\Gamma(A), \Gamma(C)) = d(\Gamma(A), \Gamma(C')) \\ d(\Gamma(B), Y) &= d(B, C) = d(\Gamma(B), \Gamma(C)) = d(\Gamma(B), \Gamma(C')) \end{aligned}$$

Logo, $Y = \Gamma(C)$ ou $Y = \Gamma(C')$, o que prova a sobrejectividade.□

Proposição 3.4 Γ *Preserva os triângulos, quer dizer, quaisquer três pontos são não colineares sse as suas imagens são não colineares;*

Demonstração:

Existe o triangulo $A\ B\ C$ sse existe o triangulo $A', B'\ C'$, pelas demonstração 3.1 e 3.2.□

Proposição 3.5 Γ *preserva ângulos;*

Demonstração:

Γ preserva d, por definição; dado $\measuredangle ABC$, com A, B, C não colineares, existem os triângulos.□

Proposição 3.6 Γ *transforma rectas paralelas em rectas paralelas;*

Demonstração:

Seja $\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma isometria, sejam as rectas r e s paralelas em $\mathbb{R}^2$ e ainda $\Gamma(r) = r'$ e $\Gamma(s) = s'$. De facto r' e s' devem ser paralelas, pois se existisse um ponto A' tal que $r' \cap s' = A'$, teríamos $A' = \Gamma(A)$, com $A \in r$ e $A' = \Gamma(B)$, com $B \in s$.

Como Γ é uma função injectiva, $A = B$, então as rectas r e s teriam um ponto em comum $A = B$. Contradição, pois r e s são paralelas por hipótese.

Portanto, r' e s' são paralelas.$\square$

Proposição 3.7 Γ *é uma bijeção;*

Demonstração:

Queremos mostrar que se r é uma recta então $\Gamma(r) = \{\Gamma(P); P \in r\}$ é uma recta onde Γ é uma isometria. Para isso, dividiremos a demonstração em duas partes:

Primeira parte: $\Gamma(r) \subset r'$ onde r' é a recta definida abaixo.

Sejam A, B pontos distintos da recta r.

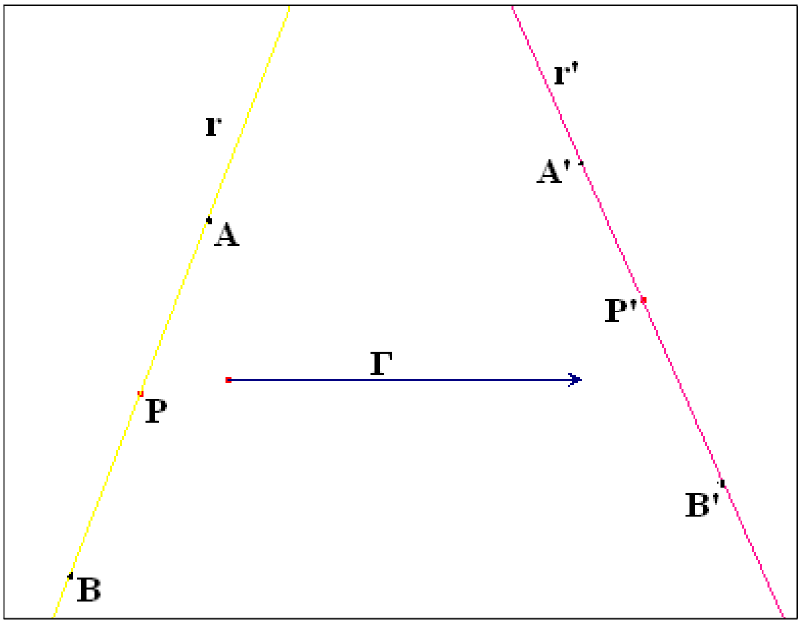


Figura 3.2:

Sejam $\Gamma(A) = A'$, $\Gamma(B) = B'$ e a recta $r' \subset \mathbb{R}^2$, tal que A', B' pertencem à recta r'.

Toma-se $P \in r$, daí A, B, P são colineares, logo um dos três pontos está entre os outros dois. Sem perda de generalidade, suponhamos $P \in AB$.

Daí $d(A,P) + d(P,B) = d(A,B)$.

Então sendo $P' = \Gamma(P)$ temos que $d(A',P') + d(P',B') = d(A',B')$, assim os pontos A', B', P' são colineares e como A' e $B' \in r'$ então $P' \in r'$.

Logo $\Gamma(r) \subset r'$.(1)

Segunda parte:

Suponhamos agora que P' é um ponto de r' e que A' esteja entre P'e B', isto é, $A' \in P'B'$.

Daí, $d(P',A') + d(A',B') = d(P',B')$;

Seja P um ponto pertencente à recta r situado à esquerda do segmento AB e tal que $d(P,B) = d(P',B')$.

Então $\Gamma(P)$ é o ponto r' à esquerda de $A'B'$ e tal que $d(\Gamma(P),B') = d(P',B')$;

Daí $\Gamma(P) = P', P' \in \Gamma(r)$.

Logo $r' \subset \Gamma(r)$.(2)

Portanto, por (1) e (2), $\Gamma(r) = r'$.$\square$

Proposição 3.8 Γ *admite inversa;*

Demonstração:

Vimos que Γ é injectiva em 3.1. Portanto, a aplicação inversa Γ^{-1} existe e também é uma isometria, uma vez que só as funções injectivas admitem inversas:

$d(\Gamma^{-1}(X), \Gamma^{-1}(Y)) = d(\Gamma\Gamma^{-1}(X), \Gamma\Gamma^{-1}(Y)) = d(X,Y)$.$\square$

Proposição 3.9 *Composição de duas isometrias é uma isometria;*

Demonstração:

Se Γ e Ψ são isometrias do plano $\mathbb{R}^2$ então a composta $\Gamma \circ \Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é também uma isometria.

Dados os pontos A, B arbitrários pertencentes a $\mathbb{R}^2$, seja $\Gamma \circ \Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $(\Gamma \circ \Psi)(A) = \Gamma(\Psi(A))$

$d((\Gamma \circ \Psi)(A), \Gamma \circ \Psi)(B)) = d(\Gamma(\Psi(A)), \Gamma(\Psi(B))) = d(\Gamma(A), \Gamma(B)) = d(A,B)$.$\square$

As propriedades acima nos indicam que o conjunto de todas as isometrias é um grupo de isometrias de $\mathbb{R}^2$, e é denotado por $\Upsilon(\mathbb{R}^2)$; tem se portanto o

Teorema 3.1 *O conjunto das isometrias forma um grupo em relação à operação de composição.*

Demonstração: Pelas proposições 3.7, 3.8, 3.9;$\square$

Proposição 3.10 *Se $\Gamma : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ é uma isometria que fixa dois pontos distintos de uma recta r, então Γ fixa todos os pontos de r.*

Demonstração:

Seja Γ uma isometria que fixa dois pontos distintos, A e B, de uma recta r, ou seja, $\Gamma(A) = A$ e $\Gamma(B) = B$.

Se existisse um ponto $C \in r : C' = \Gamma(C) \neq C$ então, pelo facto de $d(A, C) = d(\Gamma(A), \Gamma(C)) = d(A, C')$, temos que A é o ponto médio do segmento CC'.

Da mesma forma, teríamos que B seria o ponto médio de CC', logo $A = B$, o que é uma contradição.

Portanto, temos que Γ fixa qualquer ponto da recta r.$\square$

Proposição 3.11 *Se $\Gamma : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ é uma isometria que fixa três pontos não colineares, então Γ é a identidade.*

Demonstração:

Seja Γ uma isometria que fixa três pontos não alinhados P, Q e R, e seja X um ponto qualquer de $\mathbb{R}^2$.

Pela proposição anterior segue que rectas PQ, PR e QR são fixadas pontualmente por Γ .

Agora tracemos por X uma recta r que intercepte o triângulo PQR em pelo menos dois pontos distintos. Como este dois pontos são fixos por Γ , então r também é fixa pontualmente por Γ.

Logo $\Gamma(X) = X$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$, portanto Γ é a identidade.$\square$

Corolário 3.1 *Se duas isometrias coincidem em três pontos não colineares, então elas coincidem.*

Demonstração:

Sejam Γ_1 e Γ_2 duas isometrias que coincidem em três pontos não colineares P, Q e R.

Temos que:

$$\begin{aligned}\Gamma_1\,(P) &= \Gamma_2(P) = P' \\ \Gamma_1\,(Q) &= \Gamma_2(Q) = Q' \\ \Gamma_1\,(R) &= \Gamma_2(R) = R'\end{aligned}$$

Logo, se tomarmos:

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{-1} \circ \Gamma_2(P) &= \Gamma_1^{-1}(P') = P \\ \Gamma_1^{-1} \circ \Gamma_2(Q) &= \Gamma_1^{-1}(Q') = Q \\ \Gamma_1^{-1} \circ \Gamma_2(R) &= \Gamma_1^{-1}(R') = R\end{aligned}$$

Portanto, segue da proposição anterior 3.8 que:

$$\Gamma_1^{-1} \circ \Gamma_2 = I_d$$

Daí obtemos que $\Gamma_1 = \Gamma_2$.$\square$

Definição 3.12 *Seja Γ uma transformação de A em A. $X \in A$ diz-se um ponto fixo de Γ se $\Gamma(X) = X$.*

Definição 3.13 *Seja Γ uma transformação de A em A. $r \subset A$ é uma recta fixa de Γ se $\Gamma(l) = l$.*

Observação3.1: Nem sempre uma recta fixa tem pontos fixos.

Definição 3.14 ***(Feixe de Perpendicularidade)*** *é a totalidade das rectas dum plano que são perpendiculares a uma dada recta.*

A noção de isometria permite generalizar o conceito de congruência, a princípio referida para segmentos, ângulos e triângulos, ampliando-o para quaisquer subconjunto não vazios de pontos do plano chamado figuras geométricas.

Reflexões

De seguida vamos descrever como podemos obter a reflexão de um ponto $X \in \mathbb{R}$ por uma recta r. Primeiro traçamos a perpendicular a r passando por X, esta intersecta r em um ponto F.

A reflexão de X por r é o ponto X' na perpendicular de modo que F é o ponto médio do seguimento XX'.

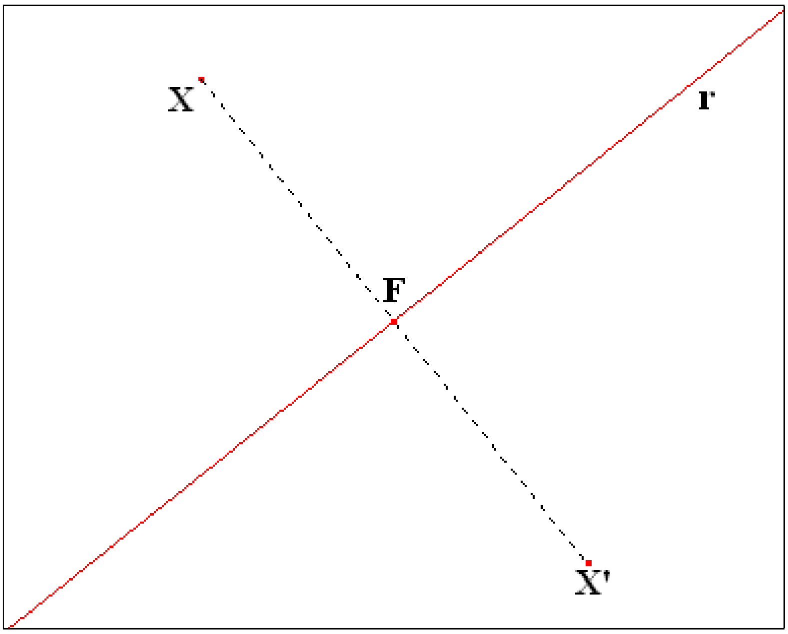


Figura 3.3:

Analiticamente temos que:

$\frac{1}{2}(X + X') = F$, onde F é o pé da perpendicular de r passando por X , assim $F = X - ((X - P).n)n$, onde $P \in r$ e n é o vector unitário normal à r.

Logo,

$X + X' = 2\ X - 2\left((X - P)\,.\,\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n}$

consequentemente,

$X' = X - 2\left((X - P)\,.\,\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n}$

Agora podemos estabelecer a seguinte definição algébrica:

Definição 3.15 *Dada uma recta r em $\mathbb{R}^2$, a reflexão em torno (ao longo)* *de r é a aplicação;*

$$\begin{array}{rcl} \Omega_r & : & \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 \\ X & \mapsto & \Omega_r(X) = X - 2\left(\left(X - P\right).\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n} \end{array}$$

onde $P \in r$ e $\overrightarrow{n}$ é um vector unitário normal à r.

Proposição 3.12 *Qualquer reflexão tem uma inversa, que é ela própria.*

Demonstração:

E fácil ver a partir da figura (3.3) que o ponto X por uma reflexão $\Omega_r(X)$ forma o ponto X', que é a imagem de X pela reflexão $\Omega_r(X)$. E é fácil de ver também que X é a imagem de X' por essa mesma reflexão. Então partindo da definição 3.15 da reflexão vem, $\Omega_r(X) = X - 2\left(\left(X - P\right).\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n}$, fazendo $k = ((X - P).\overrightarrow{n})$

Donde vem pela substituição: $\Omega_r(X) = X - 2k\overrightarrow{n}$

Logo, vem:

$$\begin{aligned} \Omega_r \circ \Omega_r(X) = \; & \Omega_r(X - 2k\overrightarrow{n}) \\ & = X - 2k\overrightarrow{n} - 2((X - 2k\overrightarrow{n} - P).\overrightarrow{n})\overrightarrow{n} \\ & = X - 2k\overrightarrow{n} - 2((X - P)\overrightarrow{n})\overrightarrow{n} + 4k(\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n})\overrightarrow{n} \\ & = X - 2k\overrightarrow{n} - 2k\overrightarrow{n} + 4k\overrightarrow{n} \\ & = X \; \square \end{aligned}$$

Observação 3.2:

No entanto, a transformação identidade não é uma reflexão, o que faz com que nenhum conjunto de reflexões por si só possa ser um grupo, já que a composta de duas reflexões, pelo menos para já, não é necessariamente uma reflexão. Na verdade, como veremos mais adiante pelo teorema 3.5, a composta de duas reflexões nunca é uma reflexão, mas isto era desde de logo suficiente para que não fosse grupo.

Veremos agora algumas propriedades ou teoremas sobre as reflexões.

Dada uma recta r em $\mathbb{R}^2$, temos que:

Teorema 3.2 *Uma reflexão é uma bijecção do plano nele mesmo, isto é, uma reflexão é uma transformação do plano.*

Demonstração:

Ω_r é injectiva : se $\Omega_r(X) = \Omega_r(Y)$, então,$\Omega_r\Omega_r(X) = \Omega_r\Omega_r(Y)$, donde

$X = Y$ pelo teorema

3.12; Ω_r é sobrejectiva: Seja dado $Y \in \mathbb{R}^2$, com vista a mostrar que existe X tal que $\Omega_r(X) = Y$; ora, pondo $X = \Omega_r(Y)$, tem-se $\Omega_r(X) = \Omega_r\Omega_r(Y) = Y$ pelo teorema 3.12.$\square$

Teorema 3.3 *Toda a simetria axial (reflexão) é uma isometria.*

Demonstração:
Seja $d(X,Y) = d(\Omega_r(X), \Omega_r(Y)), \forall X, Y \in \mathbb{R}^2$, onde, se nota que:
$\Omega_r(X) - \Omega_r(Y) = X - Y - 2((X-Y).\overrightarrow{n}).\overrightarrow{n}$
Assim,

$$| \Omega_r(X) - \Omega_r(Y)|^2 =$$
$$= |X-Y|^2 - 4((X-y).\overrightarrow{n})^2 + 4((X-Y).\overrightarrow{n})^2\,(\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}) = |X-Y|^2$$

Logo, $d(X,Y) = d(\Omega_r(X), \Omega_r(Y)), \forall X, Y \in \mathbb{R}^2$.$\square$

Teorema 3.4 *Uma simetria axial transforma um ângulo orientado de amplitude positiva, num ângulo orientado de amplitude negativa (vice-versa).*

Demonstração:

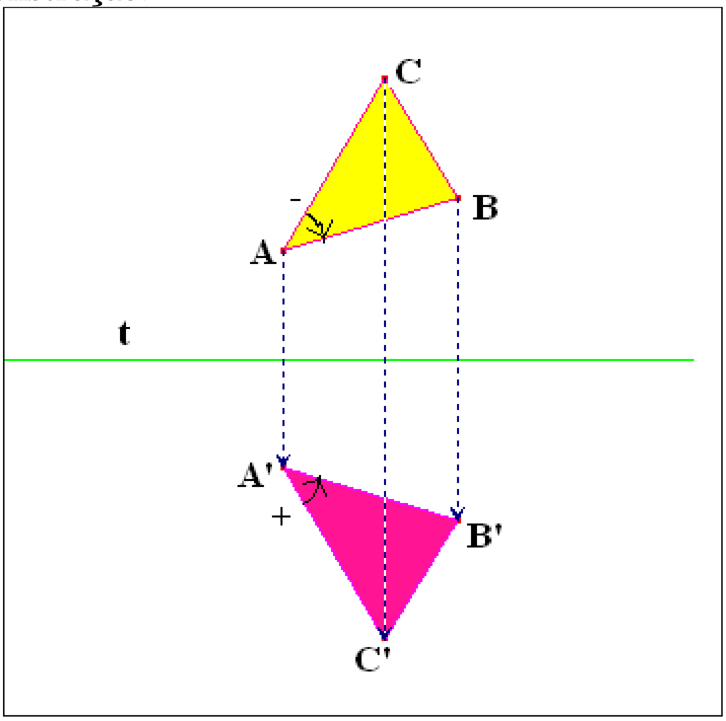


Figura 3.4:

Pelo teorema 3.3, $\triangle[ABC] = \triangle[A'B'C']$ por terem os 3 lados lados respectivamente iguais. Logo também os ângulos dos dois triângulos são iguais, pelo que $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$

Mas, orientando o ângulo de C para B, vemos que a imagem de $(A^\circ C, A^\circ B)$ é $(A'^\circ C', A'^\circ B')$, com sentidos contrários, e portanto de amplitudes contrários, isto é, $\measuredangle BAC = -\measuredangle B'A'C'$.$\square$

Definição 3.16 *Uma Transformação diz-se involutiva sse toda a reflexão é inversa a si próprio.*

Teorema 3.5 *Uma simetria axial é uma transformação involutiva.*

Demonstração:

A demonstração é análoga ao da proposição 3.12.

Partindo da definição da reflexão vem, $\Omega_r(X) = X - 2\left((X-P).\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n}$, fazendo $k = ((X-P).\overrightarrow{n})$

Então $\Omega_r(X) = X - 2k\overrightarrow{n}$

Logo, vem:

$$\begin{aligned}\Omega_r \circ \Omega_r(X) &= \Omega_r(X - 2k\overrightarrow{n}) \\ &= X - 2k\overrightarrow{n} - 2((X - 2k\overrightarrow{n} - P).\overrightarrow{n})\overrightarrow{n} \\ &= X - 2k\overrightarrow{n} - 2((X-P)\overrightarrow{n})\overrightarrow{n} + 4k(\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n})\overrightarrow{n} \\ &= X - 2k\overrightarrow{n} - 2k\overrightarrow{n} + 4k\overrightarrow{n} \\ &= X \ \square\end{aligned}$$

Teorema 3.6 *Seja r uma recta passando por um ponto P, n um vector normal a r. Então, para qualquer ponto X, tem-se $\Omega_r(X) = X$ sse $X \in r$*

Demonstração:

Pois

$$\begin{aligned}\Omega_r(X) = X &\Leftrightarrow X - 2\left((X-P).\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n} = X \\ &\Leftrightarrow 2\left((X-P).\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left((X-P).\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (X-P).\overrightarrow{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{n} \perp (X-P)\end{aligned}$$

. Mas, se $(X-P) \perp \overrightarrow{n}$, então $(X-P)$ é o vector da recta r. E como $P \in r$, temos que $X \in r$.$\square$

Observação 3.3:

Uma reflexão tem uma recta de pontos fixos, o eixo de reflexão. Além disso, uma reflexão Ω_r tem a recta r e seu feixe de perpendiculares comuns como suas rectas fixas.

Translação

Demos uma certa relevância à reflexão na recta ou simetria axial neste trabalho, uma vez, que, ela é considerada o exemplo mais importante da isometria plana. Pois, qualquer outra isometria pode ser representada como resultado da composição de um número finito de reflexões em recta; como demonstraremos mais adiante.

E para darmos continuidade à nossa investigação em torno das isometrias, iremos averiguar primeiro qual a composta de duas reflexões. Para isto, teremos de analisar dois casos, primeiro de duas rectas paralelas e segundo o de duas rectas concorrentes (vamos ver mais à frente). O caso particular da composta de duas reflexões de eixos coincidentes ou o que é o mesmo, de uma reflexão com ela própria, já foi analisado antes, tendo sido obtida a transformação identidade 3.5.

Agora vamos obter a isometria dada pela composição de duas reflexões obtidas por duas rectas paralelas, veja a figura.

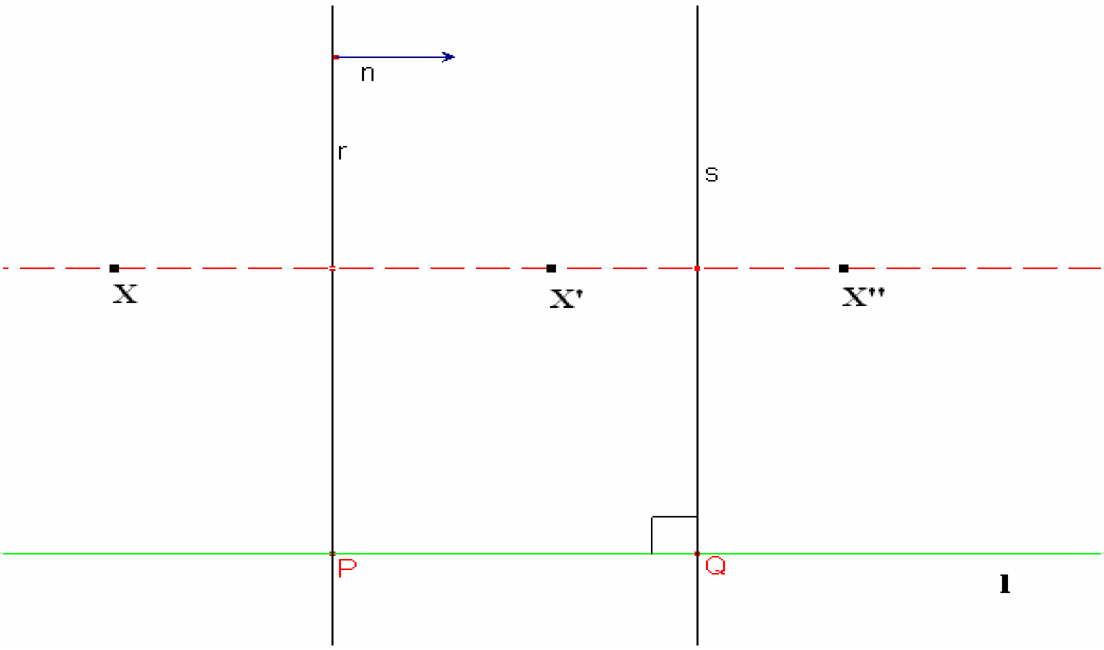


Figura 3.5:

Teorema 3.7 *A composta de duas reflexões de eixos paralelos é uma transformação, que chama translação.*

Demonstração:

Dada uma recta $l \in \mathbb{R}$, consideremos r, s rectas paralelas, perpendiculares a l, P um ponto qualquer de r, Q o pé da perpendicularidade a s passando por P, $\overrightarrow{n}$ um vector unitário normal a r (e, portanto normal a s). Tem-se, então, para qualquer ponto X pelo teorema 3.6.

$\Omega_r\Omega_s(X) = \Omega_r\left[\Omega_s(X)\right]$
$= \Omega_s(X) - 2((\Omega_s(X) - P).\overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$
$= X - 2\left(\left(X - Q\right).\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n} - 2((X - 2\left(\left(X - P\right).\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n} - P)\overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$
$= X - 2\left(\left(X - Q\right).\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n} - 2((X - P)\overrightarrow{n})\overrightarrow{n} + 4((X - Q)\overrightarrow{n})(\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$
$= X - 2((X - P)\overrightarrow{n})\overrightarrow{n} + 2((X - Q)\overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$
$= X + 2((P - Q).\overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$

$= X + 2(P - Q).\square$

Assim através do exposto teorema 3.7 podemos estabelecer a seguinte definição de translação:

Definição 3.17 *Seja t uma recta qualquer em $\mathbb{R}^2$ e sejam r e s rectas perpendiculares a t em $\mathbb{R}^2$, a transformação τ dada por:*

$$\begin{array}{rcl} \tau & = & \Omega_r \circ \Omega_s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ X & \to & \tau\left(X\right) = X + 2\left(P - Q\right) \end{array}$$

Onde $P \in r$ e $Q \in s$, é chamada **translação** ao longo de t.

Se $r \neq s$, a translação diz-se **não trivial**, caso contrário τ diz-se **trivial**, então $\Omega_r \circ \Omega_s = I_d$ (identidade).

Observações 3.4:

1. Seja $t = P + \overrightarrow{v}$ recta em $\mathbb{R}^2$, que passam por P com vector director unitário $\overrightarrow{v}$, as translações ao longo de t podem ser caracterizadas por um numero real k, que em valor absoluto, é o comprimento do vector deslocamento $\overrightarrow{\tau\left(X\right)X}$, notando uma translação ao longo de t por τ_k, onde $\tau_k\left(X\right) = X + k\overrightarrow{v}$, temos que

$\tau_{k_1} \circ \tau_{k_2}\left(X\right) = X + \left(k_1 + k_2\right)\overrightarrow{v} = \tau_{k_1+k_2}\left(X\right)$, para todo $X \in \mathbb{R}^2$.

2. Uma translação T qualquer ao longo de uma recta t podem ser caracterizada por um vector $\overrightarrow{v}$, director de t, ou seja, se denotamos $T = \tau_v$, onde $\tau_v\left(X\right) = X + \overrightarrow{v}$, esta translação é única e temos que $\tau_v \circ \tau_w$.

3. Seja τ uma translação ao longo de t se t' é uma recta qualquer paralela a t, então τ também é uma translação ao longo de t', pois, basta observarmos que cada translação ao longo de t tem o efeito de adicionar um vector director de t a cada vector no plano.

Definição 3.18 *O conjunto de todas as rectas perpendiculares a uma dada recta t em $\mathbb{R}^2$ é chamado de* ***feixe de rectas paralelas****. A recta t é uma recta perpendicular comum a este feixe.*

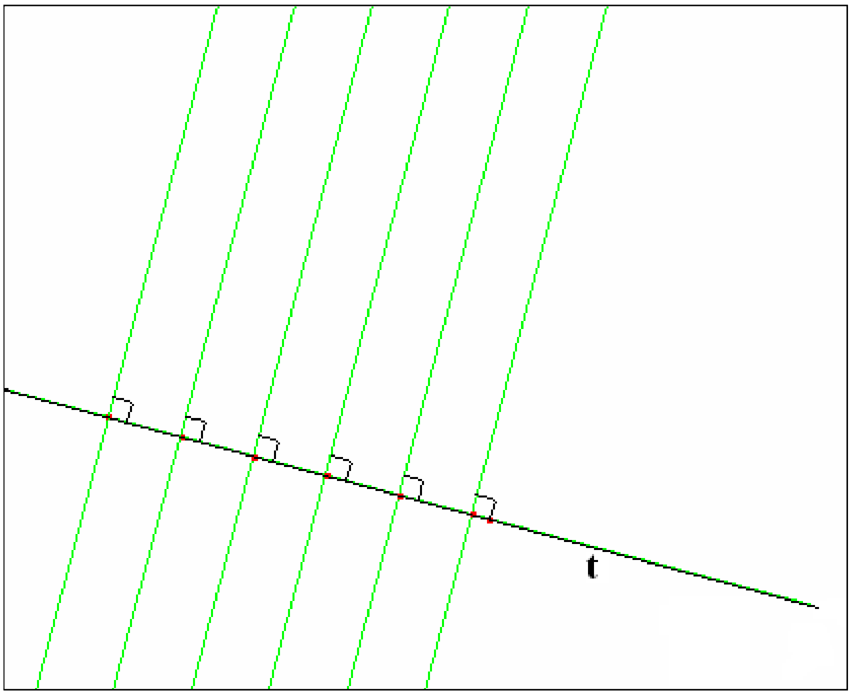


Figura 3.6:

Feixe de rectas paralelas, perpendiculares a t.

Seja $\mathcal{F}$ um feixe de rectas perpendiculares a recta t. Denotamos por $REF(P)$, o grupo gerado por todas as reflexões da forma Ω_m, onde $m \in \mathcal{F}$.

Veremos agora algumas propriedades importantes.

Propriedades das translações:

Proposição 3.13 *Sejam τ_{k_1} e τ_{k_2} translações ao longo de uma recta t em $\mathbb{R}^2$, então:*

(i) $\tau_{k_1} = I_d$ sse $k_1 = 0$

(ii) $\tau_{k_1} \circ \tau_{k_2} = \tau_{k_1} + \tau_{k_2}$ também é uma translação de t

(iii) τ_{k_1} é inversivel e sua inversa $(\tau_{k_1})^{-1} = \tau_{-k_1}$ também é uma translação ao longo de t.

Demonstrações:

(i) Podemos notar que: $\tau_{k_1}(X) = X$
para todo $X \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow X + \overrightarrow{n}k_1 = X$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{n}k_1 = 0$,como para todo $X \in \mathbb{R}^2$
$\Leftrightarrow k_1 = 0$,pois $\overrightarrow{n} \neq 0$

(ii) Podemos observar que: $\tau_{k_1} \circ \tau_{k_2}(X)$
$= \tau_{k_1}(X + k_2) = (X + k_2) + k_1$
$= X + (k_2 + k_1) = \tau_{k_1+k_2}(X)$,
que é uma translação do ponto $X \in t$ ao longo da recta t.□

(iii) τ é uma isometria, logo pela proposição 3.13 (i) e (ii).

A partir daí, podemos associar um grupo ao conjunto $TRANS(l)$ de todas as translações ao longo de t com a operação composição, vamos ter a oportunidade de aprofunda-lo no secção (3.2).

Corolário 3.2 *Toda a translação pode decompor-se, de infinitas maneiras, em duas simetria axiais de eixos paralelos.*

Teorema 3.8 ***(Teorema das Três Reflexões em Rectas Paralelas).***
O produto de três reflexões em rectas de feixe paralelo é uma reflexão numa única recta do mesmo feixe.

Demonstração:

Sejam r, s e t três rectas de um feixe F, correspondendo aos números reais a, b e c respectivamente, então:

$$\Omega_r \circ \Omega_s \circ \Omega_t(X) = \Omega_r \circ \tau_{2(b-c)}; \text{ pelo teorema 3.7}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_s \circ \Omega_t(X) &= \tau_{2(b-c)}; \\
&= \Omega_r X + 2(b-c)\overrightarrow{n} \\
&= \Omega_r(X + \mu\overrightarrow{n}), \text{onde } \mu = 2(b-c) \\
&= X + \mu\overrightarrow{n} - 2((X + \mu\overrightarrow{n} - P - a\overrightarrow{n})\overrightarrow{n})\overrightarrow{n} \\
&= X + \mu\overrightarrow{n} - 2((X-P)\overrightarrow{n})\overrightarrow{n} - 2(\mu - a)\overrightarrow{n} \\
&= X - 2(X - (P + (a-b+c)\overrightarrow{n})\overrightarrow{n})\overrightarrow{n}
\end{aligned}$$

que é a reflexão pela recta $u \in P$ passando pelo ponto $P + d\ \overrightarrow{n}$ onde $d = a - b + c$.

Logo, o produto de três reflexões de rectas em um feixe é a reflexão de uma quarta recta do mesmo feixe.□

Teorema 3.9 ***(Teorema da Representação das Translações)***

Seja $\tau = \Omega_r \circ \Omega_s$ uma translação ao longo de uma recta t. Então quaisquer rectas m, n do feixe $F = F_t$ existem e são únicas rectas m', n' tais que

$$\tau = \Omega_m \circ \Omega_{m'} = \Omega_{n'} \circ \Omega_n$$

Demonstração:

Aplicando o teorema 3.8 as rectas m, r e s temos uma única recta m' tal que $\Omega_r \circ \Omega_s \circ \Omega_m = \Omega_{m'}$. Daí, multiplicando ambos os membros por Ω_m, obtemos $\Omega_r \circ \Omega_s = \Omega_{m'}$. Analogamente se obtêm n'.

Teorema 3.10 *O conjunto $\tau(\mathbb{R}^2)$ de todas as translações, é um subgrupo abeliano do conjuntos de todas as isometrias do plano,$\Upsilon(\mathbb{R}^2)$.*

Demonstração: Segue-se de proposição 3.13.□

Observação 3.5:

Quanto a pontos fixos e rectas fixas temos que uma translação não trivial ao longo de uma recta r não tem pontos fixos e as únicas rectas fixas são as rectas do feixe de rectas paralelas a r. Com efeito, suponhamos que temos um ponto fixo X. Então por definição de ponto fixo tem-se $\Omega_r(X) = X$. Mas por definição de $\Omega_r\,(l) = l$ tem -se, então que a translação é trivial ao longo da recta r.

Rotação

Nesta secção, vamos ter a oportunidade de estudar uma isometria dada pela composição de duas reflexões de rectas concorrentes em um ponto P. Vejamos a figura a baixo:

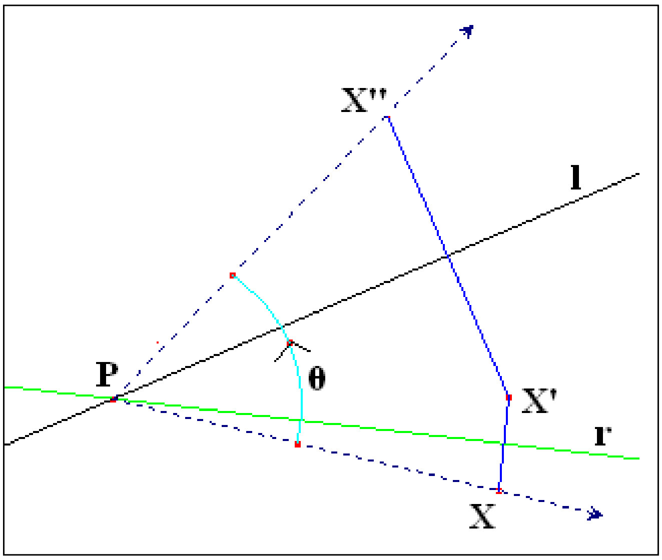


Figura 3.7:

Seja $l = P + \langle v \rangle$ a recta que passa por P com vector director unitário $\overrightarrow{v}$, a translação ao longo de l de deslocamento P, dada por $\tau_P(X) = X + P$, temos que $\tau_{(-P)} = (\tau_P)^{-1}$.

Podemos observar que: $\Omega_l(X) = X - 2\left(\left(X - P\right).\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n}$ ou seja,

$\Omega_l(X) - P = X - P - 2\left(\left(X - P\right).\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n} = \Omega_{l_o}(X - P)$, onde Ω_{l_o}é reflexão pela recta $l_o = 0 + \langle v \rangle$.

Portanto, $\Omega_l(X) = \Omega_{l_o}(X - P) + P$, para todo $X \in \mathbb{R}^2$.

Por outras palavras temos que, $\Omega_l = \tau_P \circ \Omega_{l_o} \circ \tau_{(-P)}$.

Sendo $\overrightarrow{v}$ um vector director unitário de l, podemos escrevê-lo como $v = (cos\theta, sen\theta)$, de modo que um vector normal unitário à recta l é $\overrightarrow{v}^{\perp} = \overrightarrow{n} = (-sen\theta, \cos\theta)$, onde $\theta \in [O, 2\pi]$, e assim temos que

$X = (x_1, x_2)$, $\overrightarrow{n} = (-sen\theta, \cos\theta)$ como acima,

$$
\begin{aligned}
\Omega_{l_o} &= X - 2\left(\left(X\right).\overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n} \\
&= (x_1, x_2) - 2\left((x_1, x_2)(-sen\theta, \cos\theta)\right)(-sen\theta, \cos\theta) \\
&= (x_1, x_2) + 2\left(x_1 sen\theta - x_2\cos\theta\right)(-sen\theta, \cos\theta) \\
&= (x_1 - 2x_1 sen^2\theta + 2x_2\cos\theta sen\theta, x_2 + 2x_1\cos\theta sen\theta - 2x_2\cos^2\theta) \\
&= (x_1\cos 2\theta + x_2 sen2\theta, x_1 sen2\theta - x_2\cos 2\theta) \\
&= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & sen2\theta \\ sen2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vê-se assim, que a reflexão $\Omega_{l_O} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é representada por uma matriz

2×2 logo é uma transformação linear. A matriz que representa a reflexão Ω_{l_o} na recta l_0 que passa pela origem, denota-se S_θ:
$S_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & sen 2\theta \\ sen 2\theta & \text{-} \cos 2\theta \end{bmatrix}$

Sendo $m = 0 + \langle w \rangle$ e $n = 0 + \langle k \rangle$ rectas que passam pela origem com vectores directores $\overrightarrow{w} = (\cos \psi, sen\psi)$ e $\overrightarrow{k} = (\cos \phi, sen\phi)$ temos que $S_\psi \circ S_\phi = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{-}sen\theta \\ sen\theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \Theta_\theta$ onde $\theta = 2(\psi - \phi)$.

Uma matriz Θ_θ como acima define uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que aplica os vectores $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ da base canónica de $\mathbb{R}^2$ nos vectores $v = (cos\theta, sen\theta)$ e $\overrightarrow{n} = (-sen\theta, cos\theta)$, respectivamente, isto é,

$$(\Theta_\theta)\, e_1 = \overrightarrow{v}, (\Theta_\theta)\, e_1 = \overrightarrow{n}$$

como facilmente se verifica, sendo por isso natural encarar Θ_θ como definindo uma rotação.

Se α e β sao rectas concorrentes em P, então $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta = \boldsymbol{\tau}_P \circ \Theta_\theta \circ \boldsymbol{\tau}_{(-P)}$.

Assim temos a seguinte definição:

Definição 3.19 *Se α e β sao rectas passando pelo ponto P, a isometria*
$\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$X \to \Omega_\alpha \circ \Omega_\beta (X) = \boldsymbol{\tau}_P \circ \Theta_\theta \circ \boldsymbol{\tau}_{(-P)} (X) = \Theta_{P,\theta}$. *é chamada rotação em torno de P por um ângulo θ no sentido anti-horário, que denotaremos simplesmente por $\Theta_{(P,\theta)}$, onde P é chamado centro de rotação (ver afigura acima 3.7).*

No caso em que $\alpha = \beta$, a rotação em torno de P é trivial, ou identidade;

Se $\alpha \neq \beta$ a rotação em torno de P é não trivial;

Se $\alpha \perp \beta$ a rotação em torno de P é uma meia volta (em torno de P) e denta-se η_P.

Observações 3.6:

1. Uma meia-volta em torno de um ponto P pode ser representada como uma reflexão em torno de P.

2. A composição de duas meias -volta é uma translação e, reciprocamente uma translação sempre pode ser escrita como a composição de duas meia - volta.

3. A composição de três meias -volta é uma meia -volta.

Lema 3.1 *Para quaisquer números reais θ, ϕ tem-se*
(i) $S_\theta \circ \Theta_\phi = S_{\left(\theta\ - \frac{\phi}{2}\right)}$
(ii) $\Theta_\phi \circ S_\theta = S_{\left(\theta\ + \frac{\phi}{2}\right)}$
(iii) $S_\theta \circ S_\psi \circ S_\phi = S_{(\theta\ -\ \psi\ +\ \phi)}$

Demonstração:
(i) Sabemos que: $S_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & sen2\theta \\ sen2\theta & \text{-}\cos 2\theta \end{bmatrix}$
e que $\Theta_\phi \quad = \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{-}sen\phi \\ sen\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$
Daí, $S_\theta \circ \Theta_\phi$ será,

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & sen2\theta \\ sen2\theta & \text{-}\cos 2\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{-}sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(2\theta - \phi) & sen\,(2\theta - \phi) \\ sen\,(2\theta - \phi) & \text{-}\cos(2\theta - \phi) \end{bmatrix} = S_{\left(\theta\ - \frac{\phi}{2}\right)}.\square$$

(ii) De maneira análoga, obteremos $\Theta_\phi \circ S_\theta = S_{\left(\theta\ + \frac{\phi}{2}\right)}$

(iii) Note-se que: $S_\psi \circ S_\phi = \begin{bmatrix} \cos 2\psi & sen2\psi \\ sen2\psi & \text{-}\cos 2\psi \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos 2\phi & sen2\phi \\ sen2\phi & \text{-}\cos 2\phi \end{bmatrix}$
$= \Theta_{2(\psi -\ \phi)}$

E, pelo item (i) temos que $S_\theta \circ\ \Theta_{2(\psi -\ \phi)} = S_{(\theta\ -\ \psi\ +\ \phi)}.\square$

Propriedades das rotações:

Sejam Θ_θ, Θ_ϕ rotações em torno de um ponto P e S_ψ reflexão em torno de uma recta que passa por P, então:

Proposição 3.14 $\Theta_\theta = I_d$ *se, e somente se,* $\theta = 0$.

Proposição 3.15 Θ_θ *é inversivel e sua inversa* $(\Theta_\theta)^{-1} = \Theta_{(-\ \theta)}$ *é a rotação de ângulo* $-\theta$ *de centro* P.

Proposição 3.16 $\Theta_\theta \circ \Theta_\phi = \Theta_{(\theta\ +\ \phi)}$ *é a rotação de ângulo* $\theta + \phi$ *em torno de* P.

Proposição 3.17 $\Theta_\theta \circ S_\psi = S_{\left(\frac{\theta}{2}\ +\ \psi\right)}$ *é a reflexão pela recta que passa por* P *com vector director* $\overrightarrow{v} = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2} + \psi\right), sen\left(\frac{\theta}{2} + \psi\right)\right)$.

Demonstrações:

As demonstrações das proposições 3.14 e 3.15 são triviais, já para provarmos 3.16 e 3.17, basta observarmos a tabela abaixo:

$\circ$	S_Ψ	Θ_β
S_θ	$\Theta_{2(\theta\ -\Psi)}$	$S_{\left(\theta\ -\frac{\beta}{2}\right)}$
Θ_α	$S_{\left(\Psi\ +\frac{\alpha}{2}\right)}$	$\Theta_{(\alpha\ +\beta)}$

Isto mostra que o conjunto constituído pelas rotações em torno da origem e as reflexões em rectas passando pela origem é fechado para a operação composição ou produto, e é mesmo um grupo (não comutativo) para esta operação, cujo elemento neutro é a identidade, em que a inversa multiplicativa de cada tal reflexão é ela própria, pois

$$S_\theta S_\theta = \Theta_{(\theta\ -\ \theta)} = \Theta_o = I_d$$

e a inversa de cada tal rotação Θ_θ é $\Theta_{-\ \theta}$. Este grupo chama-se o **grupo ortogonal** de $\mathbb{R}^2$ e denota-se $\mathbf{O(2)}$.Os membros deste grupo são precisamente as aplicações ortogonais do plano em si mesmo.

O grupo $\mathbf{SO(2)}$ é um subgrupo abeliano deste grupo.

Teorema 3.11 ***(Das três reflexões em rectas concorrentes)***

Sejam α, β e γ tres rectas passando por um ponto P. Então existe uma única recta l passando por P tal que

$$\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\gamma = \Omega_l$$

Demonstração:

Sejam Ω_α , Ω_β , Ω_γ reflexões ao longo das rectas α, β e γ que passam por P, com vectores directores Ω_α , Ω_β , Ω_γ respectivamente, então podemos escrever:

$\Omega_\alpha = \boldsymbol{\tau}_P \circ \Theta_\theta \circ \boldsymbol{\tau}_{(-P)}$, $\Omega_\beta = \boldsymbol{\tau}_P \circ \Theta_\phi \circ \boldsymbol{\tau}_{(-P)}$ e $\Omega_\gamma = \boldsymbol{\tau}_P \circ \Theta_\psi \circ \boldsymbol{\tau}_{(-P)}$

Logo, escolhemos l como sendo a recta passando por P com vector director

$$(\cos(\theta - \phi + \psi), sen\,(\theta - \phi + \psi))$$

temos então que

$$\Omega_l = \boldsymbol{\tau}_P \circ \Theta_{(\theta\ -\ \phi\ +\ \psi)} \circ \boldsymbol{\tau}_{(-P)} = \circ\Omega_\gamma.\square$$

Teorema 3.12 *(Representações das Rotações).*

Seja $\Theta = \Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \in ROT\,(P)$ é o conjunto de rotações em torno de P, e l uma recta qualquer passando por P. Então existem únicas rectas r e s passando por P tais que

$$\Theta = \Omega_l \circ \Omega_r = \Omega_s \circ \Omega_l$$

Demonstração:

Aplicando o teorema 3.8 para as rectas l, α e β, sabemos que existe uma única quarta recta r, tal que

$\Omega_l \circ \Omega_\alpha \circ \Omega_\beta = \Omega_r$

Daí, multiplicando ambos os lados por Ω_l, obtemos que $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta = \Omega_l \circ \Omega_r$, Logo $\Theta = \Omega_l \circ \Omega_r$

Aplicando raciocínio análogo para as rectas l, α e β, veremos que existe uma única recta s talque $\Theta = \Omega_s \circ \Omega_l$

Portanto, chegamos a $\Theta = \Omega_s \circ \Omega_l = \Omega_l \circ \Omega_r$.$\square$

Teorema 3.13 *(Teorema das Adição de Ângulos)*

Sejam $\Theta_{(A,\theta)}$ e $\Theta_{(B,\alpha)}$ as rotações de ângulos θ e α, respectivamente.

Se $\theta + \alpha = 0°$, temos que $\Theta_{(A,\theta)} \circ \Theta_{(B,\alpha)}$ é uma translação, caso contrário , $\Theta_{(A,\theta)} \circ \Theta_{(B,\alpha)}$ é a $\Theta_{(c,\theta\,+\,\alpha)}$, a rotação de centro C e ângulo $\theta + \alpha$, onde C é um ponto conveniente.

Demonstração:

Sejam $\Theta_{(A,\theta)}$ e $\Theta_{(B,\alpha)}$ as rotações dos centros A e B, e ângulos θ e α, respectivamente e r a recta que passa por A e B.

Seja s a recta que passa por A e forma um ângulo de $\frac{\theta}{2}$ com r, e seja t a recta que passa por B formando um ângulo $\frac{\theta}{2}$, ambas com a mesma orientação, logo

$\Theta_{(A,\theta)} = \Omega_r \circ \Omega_s$ e $\Theta_{(B,\alpha)} = \Omega_t \circ \Omega_r$,

Se $\theta + \alpha = 0°$, então s e r são paralelas e $\Theta_{(B,\alpha)} \circ\, \Theta_{(A,\theta)} = \Omega_t \circ \Omega_s$ é uma translação.

Se $\theta + \alpha \neq 0°$, então s e r se intersectam em C com ângulo $\pi - \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$, considerando a orientação positiva temos que

$\Theta_{(B,\alpha)} \circ\, \Theta_{(A,\theta)} = \Theta_{(c,\theta\,+\,\alpha)}$,$\square$

Como a distância entre dois pontos do plano é definida pelo produto interno o conceito de isometria esta intimamente ligado ao conceito de transformação ortogonal de $\mathbb{R}^2$.

Definição 3.20 *Uma transformação ortogonal* $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *é uma transformação (linear) que mantém o produto interno, isto é, que satisfaz a condição:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2 : \Gamma(x) \mid \Gamma(y) = x \mid y$$

Uma transformação ortogonal do plano, por ser linear, é uma isometria que mantém fixa a origem. As isometrias que mantêm fixa a origem têm que ser transformações ortogonais e daí deduzirmos a seguinte proposição:

Proposição 3.18 *Qualquer isometria* Γ *se escreve de maneira única como composição de uma translação* $\tau_{\overrightarrow{u}}$ *com uma transformação ortogonal* $\Gamma^{\perp}$: $\Gamma = \tau_{\overrightarrow{u}} \circ \Gamma^{\perp}$, *onde* $\overrightarrow{u} = \Gamma(0)$. *A transformação ortogonal* $\Gamma^{\perp}$ *chama-se transformação ortognal associada a* Γ.

O lema seguinte permite identificar geometricamente as transformações ortogonais no plano.

Lema 3.2 *Uma transformação ortogonal do plano é uma rotação de centro na origem ou uma reflexão numa recta que passa pela origem.*

Demonstração:

Uma transformação ortogonal, por ser uma aplicação linear, é dada por uma expressao da forma

$\Gamma^{\perp}(x, y) = (ax + by, cx + dy) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Em particular $\Gamma^{\perp}(1, 0) = (a, c)$ e $\Gamma^{\perp}(0, 1) = (b, d)$. Como $\Gamma^{\perp}$ satisfaz a condição 3.20, a, b, c, d tem que verificar as seguintes igualdades $\Gamma^{\perp}(1, 0) \mid \Gamma^{\perp}(1, 0) = a^2 + c^2 = 1$, $\Gamma^{\perp}(1, 0) \mid \Gamma^{\perp}(0, 1) = ab + cd = 0$

$\Gamma^{\perp}(0, 1) \mid \Gamma^{\perp}(0, 1) = b^2 + d^2 = 1$. Não é difícil concluirmos destas três igualdades que existe sempre $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que $\Gamma^{\perp}$ tem uma expressão da forma:

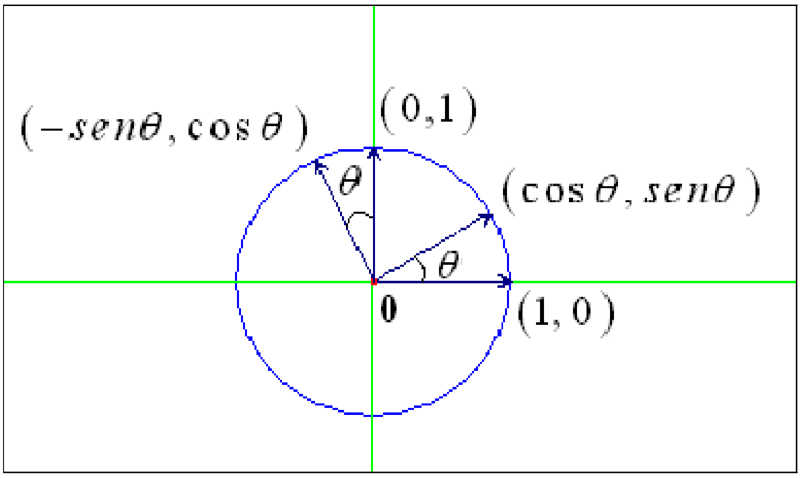


Figura 3.8:

Partindo da figura acima temos: $\Gamma^{\perp}(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x\cos\theta - ysen\theta,\ xsen\theta + y\cos\theta)$.

Podermos notar que a partir da figura 3.8 que $\Gamma^{\perp}$ é uma rotação em torno da origem, $\Gamma^{\perp}$ roda qualquer vector de um ângulo θ em torno da origem.

ou

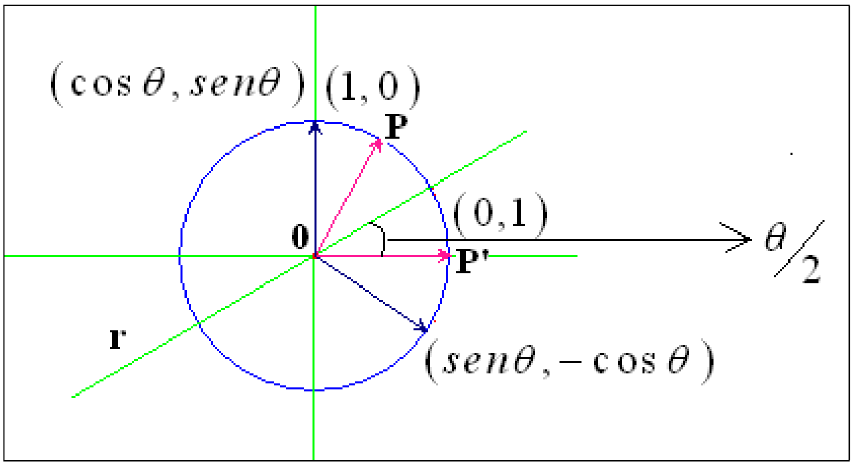


Figura 3.9:

e partindo da figura (3.9) $\Gamma^{\perp}(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ sen\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$
$= (x\cos\theta + ysen\theta,\ xsen\theta - y\cos\theta)$.
Também podermos notar que a partir da figura (3.9) que $\Gamma^{\perp}$ faz corre-

sponder a cada vector $\overrightarrow{OP}$ o vector $\overrightarrow{OP'}$ onde P' é o ponto do plano tal que a mediatriz do segmento de recta PP' é a recta r que passa pela origem e faz um ângulo de $\frac{\theta}{2}$ com o eixo dos $XX's$.

Neste último caso $\Gamma^{\perp}$ é a reflexão ao longo da recta r.$\square$

Teorema 3.14 *Sejam os grupos* $\mathbf{O(2)} = \{M \in M_n(\mathbb{R}^2); M \times M^t = I_d\}$ *ortogonal de ordem* 2, *e* $\mathbf{SO(2)} = \{M \in \mathbf{O(2)}; \det(A) = 1\}$, *ortogonal especial de ordem* 2, *então* $REF(O)$ *é isomorfo a* $\mathbf{O(2)}$ *e* $ROT(O)$ *é isomorfo o* $\mathbf{SO(2)}$, *onde* O *é a origem de* $\mathbb{R}^2$.

Demonstração:

Para verificar os isomorfismos indicados basta considerar a aplicação $\Psi : REP(O) \to \mathbf{O(2)}$

Pelo lema 3.1 temos que Ψ é um homomorfismo de grupos, além disso Ψ é injectiva, pois as matrizes de reflexões e rotações são invertíveis.

Dado $M \in \mathbf{O(2)}$, temos que $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, pelo lema 3.2 temos ou por

$$M \times M^t = I_d \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \theta \in \mathbb{R}, a = \cos\theta \text{ e } b = sen\theta \\ \exists \phi \in \mathbb{R}, c = \cos\phi \text{ e } d = sen\phi \\ \cos(\theta - \phi) = 0 \end{cases}$$

logo temos que $\theta = \phi + \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, de onde concluímos que

$$M = \begin{bmatrix} \cos 2\Phi & sen 2\Phi \\ sen 2\Phi & -\cos 2\Phi \end{bmatrix} \text{ ou } M = \begin{bmatrix} \cos 2\Phi & -sen 2\Phi \\ sen 2\Phi & \cos 2\Phi \end{bmatrix}$$

Ainda, temos o outro isomorfismo o facto de que na matriz M temos ainda a relação ad-bc=1, logo a única possibilidade é $M = \begin{bmatrix} \cos 2\Phi & -sen 2\Phi \\ sen 2\Phi & \cos 2\Phi \end{bmatrix}$ $\square$

Reflexões com deslizamento

Agora vamos analisar as isometrias obtidas por uma reflexão seguida de uma translação, que ilustramos na figura abaixo.

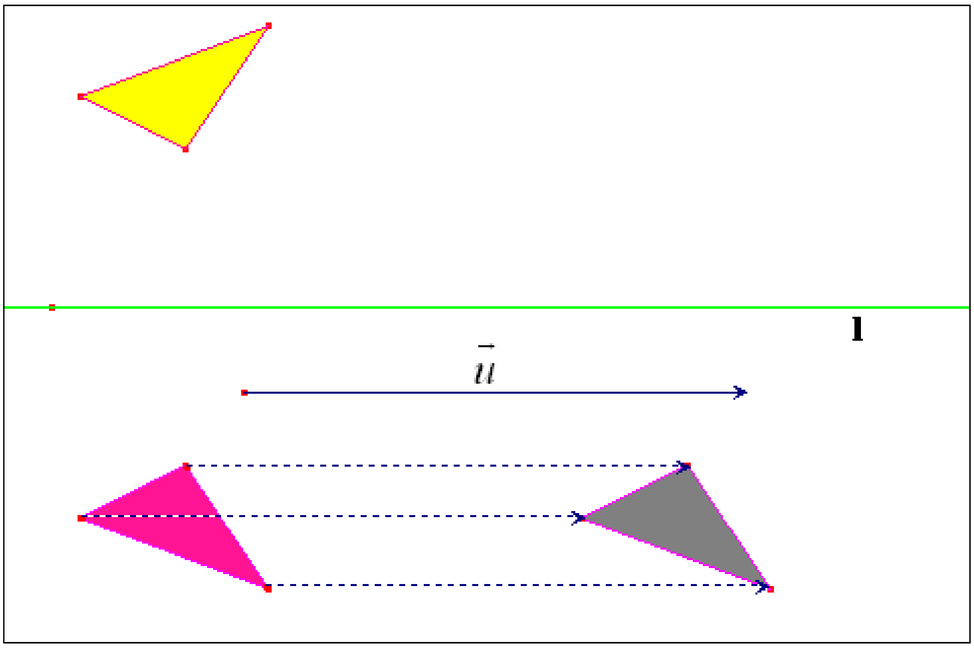


Figura 3.10:

Figura com sua imagem por uma reflexão seguida de uma translação.

A isometria acima chama-se reflexão com deslizamento, e é definida do seguinte modo

Definição 3.21 *Seja l uma recta que passa pelo ponto P e sejam Ω_l a reflexão por l e τ_v a translação ao longo de l, então $\Omega_l \circ \tau_l = \Delta$ é a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \Omega_l \circ \tau_l & : & \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ X & \rightarrow & \Omega_l \circ \tau_l = X + \overrightarrow{v} - (2\,(X-P)\,\overrightarrow{n})\,\overrightarrow{n} \end{array}$$

onde $\overrightarrow{n}$ é um vector unitário normal à l e perpendicular à $\overrightarrow{v}$.

Se $v = 0$, neste caso a translação é trivial e a translação deslizante reduz-se à reflexão Ω_l, dizendo-se neste caso que a reflexão deslizante è trivial.

Definição 3.22 *Uma reflexão deslizante trivial é, pois, uma reflexão. Caso contrário diz-se não trivial.*

Observações 3.7: Sejam a translação $\tau_{\overrightarrow{v}}$ e a reflexão Ω_l temos que:

1. $\tau_{\overrightarrow{v}} \circ \Omega_l = \Omega_l \circ \tau_{\overrightarrow{v}}$, pois $v \mid n = 0$
2. $(\tau_{\overrightarrow{v}} \circ \Omega_l)^2 = (\tau_{\overrightarrow{v}})^2 = \tau_{2\overrightarrow{v}}$
3. $(\tau_{\overrightarrow{v}} \circ \Omega_l)^{-1} = \tau_{-\overrightarrow{v}} \circ \Omega_l$

Teorema 3.15 *Sejam r, s, t três rectas distintas, nem todas concorrentes e nem todas paralelas. Então $\Omega_r \circ \Omega_s \circ \Omega_t$, é uma reflexão com deslizamentos não trivial.*

Demonstração:

Suponhamos que r e s cruzam em P, consideremos l como sendo a recta que passa por P e é perpendicular a t.

Seja H o ponto de intersecção de l e t. Usando o teorema da representação das rotações 3.12, sabemos que existe uma recta m passando por P tal que

$\Omega_r \circ \Omega_s = \Omega_m \circ \Omega_l$ e $\Omega_r \circ \Omega_s \circ \Omega_t = \Omega_m \circ \Omega_l \circ \Omega_t$

Seja n a recta passando por H perpendicular a m, e seja n' a recta passando por H perpendicular a n.

Assim, temos que $\Omega_l \circ \Omega_t = \Omega_{n'} \circ \Omega_n = M_H$ é a meia volta de centro F.

Como consequência, temos

$$\Omega_r \circ \Omega_s \circ \Omega_t = \Omega_m \circ \Omega_{n'} \circ \Omega_n$$

Notemos que $\Omega_m \circ \Omega_{n'}$ é uma translação ao de n, já pelo facto de que F não está em m, temos que n' e m são distintas.

Logo $\Omega_r \circ \Omega_s \circ \Omega_t$ é uma reflexão com deslizamento não trivial.

Se r não intersecta s mas s intersecta t, basta aplicar o mesmo argumento a

$$\Omega_r \circ \Omega_s \circ \Omega_t = (\Omega_r \circ \Omega_s \circ \Omega_t)^{-1}$$

Do facto de que $\Omega_r \circ \Omega_s \circ \Omega_t = \tau_v \circ \Omega_l$, segue que

$\Omega_r \circ \Omega_s \circ \Omega_t = (\tau_v \circ \Omega_l)^{-1} = \tau_{-v} \circ \Omega_l$ também é uma reflexão com deslizamento.□

Teorema 3.16 *Sejam Δ uma reflexão com deslizamento e Ω_l uma reflexão qualquer, então $\Omega_l \circ \Delta$ é uma translação ou uma rotação.*

Demonstração:

Seja r o eixo da reflexão deslizamento Δ, daí existem dois casos a serem considerados.

Caso1: r intersecta l. Seja P o ponto de intersecção. Pelo teorema da representação das translações 3.9 podemos escrever $\Delta = \Omega_r\Omega_a\Omega_b$ onde a passa por P, a e b são perpendiculares a r; Então, $\Omega_l \circ \Delta = \Omega_l\Omega_r\Omega_a\Omega_b$

Mas agora l, r, e a todas passam por P. Pelo teorema das três reflexões existe uma recta e passando por P tal que

$\Omega_l \circ \Delta = \Omega_e \circ \Omega_b$

Logo, $\Omega_l \circ \Delta$ é uma translação ou uma rotação.

Caso2: r é paralela a l, então $\Omega_l \circ \Delta = \Omega_l\Omega_r\Omega_a\Omega_b = \Omega_l\Omega_a\Omega_r\Omega_b$

Note que $b \perp r$ e $a \perp l$, assim $\Omega_l\Omega_a\Omega_r\Omega_b$ são meias-voltas distintas. Assim, $\Omega_l \circ \Delta$ é uma translação ou uma rotação.$\square$

Observações 3.8:

Uma reflexão com deslizamento não trivial não tem ponto fixo, e tem exactamente uma recta fixa, a saber, o seu eixo.

3.1.2 Classificação das Isometrias

Do estudo feito nas secções anteriores, já nesta secção pretendemos classificar as isometrias planas quanto aos pontos fixos e rectas fixas, resumirmo-los nos seguintes teoremas:

Teorema 3.17 ***(Classificação das Isometrias Planas em termos de Pontos Fixos)***

(i) Uma translação não trivial não possui pontos fixos;
(ii) Uma rotação não trivial tem exactamente um ponto fixo, o seu centro;
(iii) Os pontos fixos de uma reflexão são os pontos do seu eixo;
(iv) Uma reflexão deslizante não trivial não possui pontos fixos;
(v) Todos os pontos do plano são pontos fixos da identidade;

Teorema 3.18 ***(Classificação das Isometrias Planas em termos de Rectas Fixas)***

(i) Uma translação não trivial ao longo de uma recta r tem como rectas fixas todas as rectas paralelas a r;

(ii) Uma meia volta centrada num ponto C tem como rectas fixas todas as rectas passando por C. Uma rotação não trivial que não seja uma meia -volta não possui rectas fixas;

(iii) Uma reflexão em relação a uma recta r tem como rectas fixas a recta r e todas as rectas perpendiculares a r;

(iv) Um deslocamento não trivial tem uma única recta fixa — o seu eixo.

(v) A identidade deixa fixas todas as rectas;

Definição 3.23 *Um **movimento Plano** é uma transformação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ dada pela composição de um n°finito de reflexões.*

Teorema 3.19 *Um movimento plano é a composição de no máximo três reflexões.*

Teorema 3.20 *Toda isometria plana é um movimento plano.*

Agora vamos demonstrar o teorema das três reflexões:

Teorema 3.21 ***(Teorema das Três Reflexões)***
Sejam α, β e γ são rectas em $\mathbb{R}^2$, temos que:

(i) Se α, β e γ são duas a duas paralelas, então $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\gamma$ é uma translação.

(ii) Se $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{P\}$, então $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\gamma$ é uma rotação.

(iii) Se α, β e γ não são concorrentes, nem duas a duas paralelas, então $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\gamma$ é uma reflexão com deslizamento.

Demonstração:

Os itens 3.21(i) e (ii) seguem dos teoremas 3.8 e 3.11.

(iii) Suponhamos que α e β se interceptam no ponto P e seja l a recta que passa por P e é perpendicular a γ.

Consideremos H o ponto de intersecção das rectas l e γ, usando o teorema da representação para rotações, sabemos que existe uma recta m passando por P tal que $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta = \Omega_m \circ \Omega_l$ e $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\gamma = \Omega_m \circ \Omega_l \circ \Omega_\gamma$.

Seja n a recta que passa por H perpendicular a m e seja n' a recta que passa por H perpendicular a n, então temos. $\Omega_l \circ \Omega_\gamma = \Omega_{n'} \circ \Omega_n = \Omega_H$

pois $l \perp \gamma$ e $l \cap \gamma = \{H\}$ e $n \perp n'$ e $n \cap n = \{H\}$.

Além disso, por construção como $n \perp n'$ e $n \perp m$ segue que m e n' são paralelas.

Assim temos $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\gamma = \Omega_m \circ \Omega_{n'} \circ \Omega_n = \tau \circ \Omega_n$ é uma rotação com deslizamento.

Se α não intersecta β, então deve intersecta γ e a demonstração é análoga a anterior.$\square$

Teorema 3.22 *(**Teorema de Classificação das Isometrias Planas**)*
Toda a isometria plana é a composição de no máximo três reflexões.

Demonstrações:
Seja $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma isometria e sejam $\triangle ABC$ um triângulo e $\triangle A'B'C'$ o triângulo obtido de $\triangle ABC$ por Γ.

Caso$_1$: $A = A', B = B'$ e $C = C'$. Logo $\Gamma = I_d$, que é o quadrado de qualquer reflexão Ω_l.

Caso$_2$: $A = A', B = B'$ e $C \neq C'$
$d(A, C) = d(A', C') = d(A, C')$
$d(B, C) = d(B', C') = d(B, C')$

Note que $C\left(A, \left\|\overrightarrow{AC}\right\|\right) \cap C\left(B, \left\|\overrightarrow{BC}\right\|\right) = \{C, C'\}$ e o segmento $AB \perp CC'$, pois C e C' são equidistantes de A e B.

Seja l a recta que contem o segmento AB, logo $l \perp CC'$. (ver a figura abaixo)

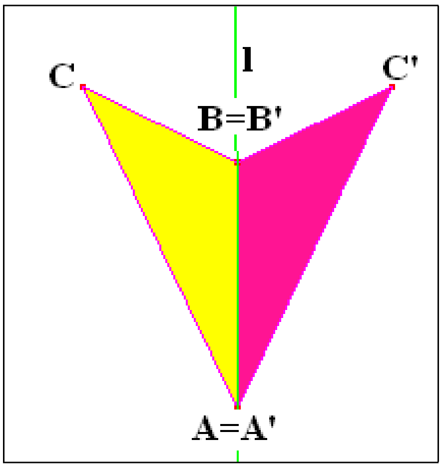


Figura 3.11:

Notemos que,

$$\begin{aligned} \Omega_l(A) &= A' = A \\ \Omega_l(B) &= B' = B \\ \Omega_l(C) &= C' \end{aligned}$$

Portanto $\Gamma = \Omega_l$, onde l é a recta que contém o segmento AB.

Caso$_3$: $A = A', B \neq B', C \neq C'$.

Seja l a recta perpendicular ao segmento BB' passando pelo ponto A, então

$$\begin{aligned}\Omega_l(A) &= A\\ \Omega_l(B) &= B'\\ \Omega_l(C) &= D\end{aligned}$$

Consideremos agora, a recta n que contém o seguimento AB', que por sua vez é perpendicular ao segmento DC', conforme a figura abaixo, uma vez que D e C' são equidistantes de A e B', daí,

$$\begin{aligned}\Omega_r(A) &= A\\ \Omega_r(B) &= B'\\ \Omega_r(D) &= C'\end{aligned}$$

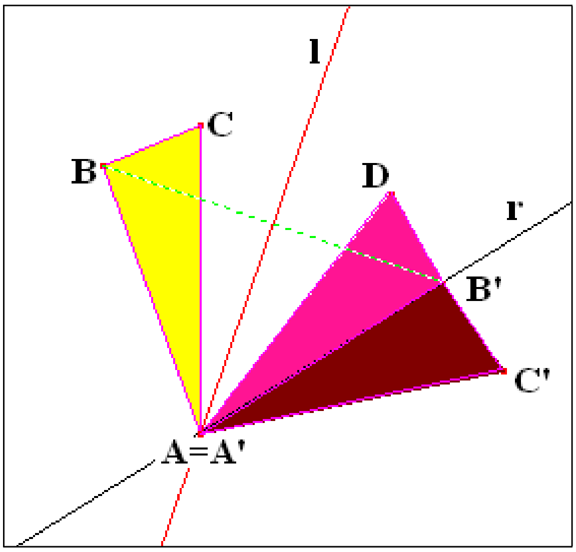


Figura 3.12:

Logo

$$\begin{aligned}\Omega_r \circ \Omega_l(A) &= \Omega_r(A) = A\\ \Omega_r \circ \Omega_l(B) &= \Omega_r(B) = B'\\ \Omega_r \circ \Omega_l(C) &= \Omega_r(D) = C'\end{aligned}$$

Portanto, $\Gamma = \Omega_r \circ \Omega_l$

Caso$_4$: $A \neq A', B \neq B', C \neq C'$.
Seja l a mediatriz do segmento AA', logo

$$\begin{aligned}\Omega_l(A) &= A' \\ \Omega_l(B) &= D \\ \Omega_l(C) &= Q\end{aligned}$$

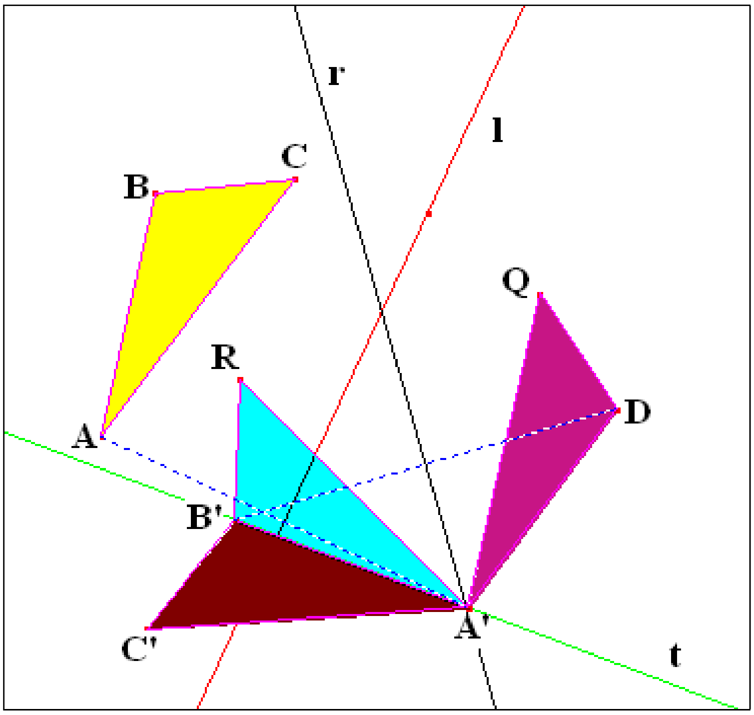


Figura 3.13:

Daí, voltamos ao caso anterior, ou seja, tomemos r como sendo a recta que é perpendicular ao seguimento PB' passando pelo ponto A', então

$$\begin{aligned}\Omega_r(A') &= A' \\ \Omega_r(D) &= B' \\ \Omega_r(Q) &= R\end{aligned}$$

Considere agora, a recta t que contem o segmento $A'B'$, que por sua vez é perpendicular ao segmento RC', uma vez R e C' são equidistantes de A e B', donde,

$$\begin{aligned}\Omega_t(A') &= A'\\ \Omega_t(B') &= B'\\ \Omega_t(R) &= C'\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Omega_t \circ \Omega_r \circ \Omega_l(A) &= \Omega_t \circ \Omega_r(A') = \Omega_t(A') = A'\\ \Omega_t \circ \Omega_r \circ \Omega_l(B) &= \Omega_t \circ \Omega_r(D) = \Omega_t(B') = B'\\ \Omega_t \circ \Omega_r \circ \Omega_l(C) &= \Omega_t \circ \Omega_r(Q) = \Omega_t(R) = C'\end{aligned}$$

Portanto, $\Gamma = \Omega_t \circ \Omega_r \circ \Omega_l$.□

Corolário 3.3 ***(Corolário do Teorema de Classificação das Isometrias Planas)***
As isometrias planas são a identidade, as reflexões, as translações, as rotações e as reflexões com deslizamentos.

Definição 3.24 *Uma isometria é* ***par*** *(ou* ***própria****) se é dada pela composição de um número par de reflexões, caso contrário a isometria é* ***impar*** *(ou* ***imprópria****)*

Teorema 3.23 *As isometrias planas pares são a identidade, as translações e as rotações, e as isometrias planas impares são as reflexões e as reflexões deslizantes.*

Observações 3.9:
O conjunto $\Upsilon P(\mathbb{R}^2)$ de todas as isometrias planas pares, munido da composição, é um grupo (segue-se do teorema anterior) que também é subgrupo de $\Upsilon(\mathbb{R}^2)$.

3.2 Abordagem através da Teoria dos Grupos

Nesta secção, vamos ter a oportunidade de fazer uma abordagem mais objectiva e laboral da teoria dos grupos aplicada à geometria.

Como, relatamos no capítulo anterior, que a classificação dos grupos de transformações simplifica e coordena o estudo das propriedades geométricas de figuras, clarifica ligações entre vários campos da geometria e constitui um método fecundo de pesquisa.

Segundo Klein, a geometria do grupo G é o estudo das propriedades invariantes para a transformações de G.

Para clarificar, simplificar o estudo de algumas relações geométricas.

Um grupo G de transformações bijectivas de conjunto ξ de pontos, sobre ξ, pode ser algebrizado com a operação $\circ$ (composição de funções).

Definição 3.25 *Um grupo é um conjunto G no qual se define uma operação binária (adição, multiplicação, composição etc.)*

Critério:

$(G, \circ)$ tera estrutura de grupo sse:

a) $\forall T_1, T_2 \in G$, $T_1 \circ T_2 \in G$

b) $\forall T \in G$, $\subset T^{-1} \in G$.

c) $\exists T_0 \in G : \forall T \in G, T \circ T_0 = T_0 \circ T = T$

Com efeito estas duas condições garantem que a identidade I_d pertence a G, logo $(G, \circ)$ é grupoide com elemento neutro. Por outro lado a composição de funções é sempre associativa, portanto temos um semigrupo com elemento neutro em que todo o elemento tem inverso, ou seja, um grupo.

Teorema 3.24 *$TRANS(l)$, o conjunto de todas as translações ao longo de l, é um grupo abeliano isomorfo ao grupo aditivo dos números reais.*

Demonstração:

a) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\forall P \in \mathbb{R}^2$,tem-se:

$\tau_\lambda \circ \tau_\mu (P) = \tau_\lambda (P + \mu \overrightarrow{n}) = P + \mu \overrightarrow{n} + \lambda \overrightarrow{n} = P + (\mu + \lambda) \overrightarrow{n} = \tau_{\mu+\lambda} (P)$

Da mesma forma, temos que $\tau_\mu \circ \tau_\lambda (P)$,para todo $P \in \mathbb{R}^2$

Notemos que $\mu + \lambda = \lambda + \mu$, logo $\tau_\lambda \circ \tau_\mu = \tau_\mu \circ \tau_\lambda$, temos que as translações ao longo de l comutam. A associatividade é imediata, pois a composição de aplicações é associativa.

b)$\forall \lambda \in \mathbb{R}, -\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se: $(\tau_\lambda)^{-1} = \tau_{-\lambda}$, onde $\tau_{-\lambda}$ é o elemento inverso de τ_λ

De facto $\tau_{-\lambda} \circ \tau_\lambda = \tau_{-\lambda+\lambda} = \tau_0 = I_d$ (identidade)

Portanto, **TRANS**(l) *é um subgrupo de* **ISO** $(\mathbb{R}^2)$.

Considerando em $\mathbb{R}$ a estrutura de grupo aditivo $(\mathbb{R}, +, 0)$, vê-se que a aplicação $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbf{TRANS}(l)$ é um isomorfismo de grupos (é bijectiva), pois basta observar que para quaisquer números reais λ, μ tem-se $\tau_\lambda \circ \tau_\mu = \tau_{\mu+\lambda}$,e $\tau_0 = I_d$.□

Teorema 3.25 *$ROT(O)$, o conjunto de todas as rotações em torno da origem O, é um grupo abeliano*

Demonstração:

a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall P \in \mathbb{R}^2$,tem-se:

$$\Theta_{(o,\ \alpha)} \circ \Theta_{(o,\beta)} = \Theta_{(o,\ \alpha+\beta)}(P)$$

b)$\forall \alpha \in \mathbb{R}, -\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\Theta_{(o,\ \alpha)} \circ \Theta_{(o,-\ \alpha)} = \Theta_{(o,\ o)} = I_d; \text{ pois} \left[\Theta_{(o,\ \alpha)}\right]^{-1} = \Theta_{(o,-\ \alpha)}$$

O que mostra que o conjunto de todas as rotações em torno da origem é fechado para a composição e é um grupo comutativo para essa operação.□

Observação 3.10:

Quanto à reflexão podemos constatar pelo teorema 3.6 que não é um grupo.

3.3 Simetrias

Devido à sua grande importância hoje em dia, na matemática como nas outras áreas da ciência, pretendemos focalizar nesta secção, ainda que de uma forma muito resumida, sobre as simetrias.

Pois, a partir do século XIX desenvolveu-se um sentido especial vocacionado para as simetrias abstractas que só podem ser percebidas pela mente. Este sentido recebemo-lo através da teoria dos grupos, que pode ser caracterizada como o estudo matemático da simetria.

A teoria dos grupos ajuda a reconhecer e a desenvolver a simetria dos objectos, físicos ou matemáticos.

Um uso típico da teoria dos grupos nesta secção é o de caracterizar uma figura através das suas simetrias, isto é, dos movimentos da figura que as deixam aparentemente invariante.

Recorde-se que uma figura do plano f é um conjunto não vazio de pontos de $\mathbb{R}^2$.

Definição 3.26 *Seja $f \subset \mathbb{R}^2$ uma figura plana e Γ uma isometria que deixa invariante a figura. Dizemos que Γ é uma simetria de f, isto é $\Gamma(f) = f$.*

Observação 3.11:

O conjunto de todas as simetrias de f é denotado por $S(f)$, e que $(S(f), \circ)$ é um subgrupo de $(\Upsilon(\mathbb{R}^2), \circ)$.

Estudaremos já de seguida as simetrias das configurações simétricas finitas, e poderemos ver como as simetrias de tais figuras podem ser organizadas para formar um grupo. Em geral, tratam-se de **grupo finitos**, mas apresentaremos um exemplo de figura plana que tem um grupo de simetria infinita. Na secção 4.3.3 alargaremos a nossa visão sobre as simetrias de configurações infinitas ou **grupo de frisos** de uma forma elementar. Trataremos de seguida questão:

"Como descrever o grupo de simetria de uma configuração geométrica que se estende ao infinito?"

Pode-se por exemplo dizer dum triângulo equilátero que o seu grupo diedral é D_3 (figura 2.11); ou dum pentágono regular que o seu grupo diedral é D_5, mas como fazer com o grupo de simetrias da ciclóide (secção 4.3.3 figura 4.18) que se prolonga ao infinito numa direcção? qual é o grupo das simetrias da quadricula de um papel milimétrico normal que se estendendo-se ao infinito em duas direcções?

São as questões que trataremos a seguir. Comecemos com a

Definição 3.27 ***Grupo Cíclico*** *é um grupo monogerado (gerado por um único elemento) e finito.*

Definição 3.28 ***Grupo Diedral*** *é um grupo de um polígono regular finito, gerado por uma reflexão e uma rotação.*

Teorema 3.26 *(Classificação dos Grupos Finitos) – Seja f uma configuração plana de $\mathbb{R}^2$. Os grupos finitos, $S(f)$ (subgrupos de $\Upsilon(\mathbb{R}^2)$) são de dois tipos:*

– $C_n = \left\langle \Theta_{\left(P;\frac{2\pi}{n}\right)} \right\rangle$,o grupo cíclico de ordem n, gerado por uma rotação de ângulo $\frac{2\pi}{n}$.

– $D_n = \left\langle \Theta_{\left(P;\frac{2\pi}{n}\right)}, \Omega_l \right\rangle$, o grupo diedral de ordem n (que tem $2n$ elementos), gerado por uma rotação $\Theta_{\left(P;\frac{2\pi}{n}\right)}$, e pela reflexão numa recta que contém P.

Exemplo 3.3 *Considere a seguinte figura:*

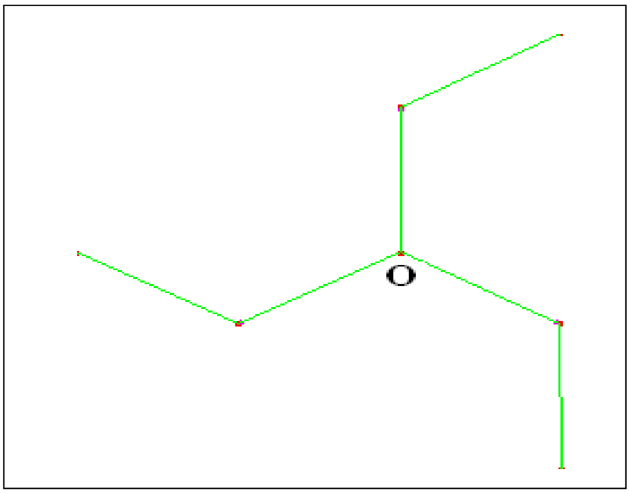


Figura 3.14:

A única simetria desta figura é a identidade, a rotação de centro em O e amplitude $120°$ e a rotação de centro em O e amplitude $240°$. $\Theta_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)}$ é um gerador deste grupo, já que composto consigo próprio dá $\Theta_{\left(O;\frac{4\pi}{n}\right)}$ e composto consigo próprio duas vezes dá identidade.

Dizemos então que este grupo é cíclico de ordem 3 gerado por $\Theta_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)}$, e representa-se por $\Theta_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)} = C_3$.

Nota 3.1 *Se um grupo simétrico tem um único gerador, então diz-se cíclico, podendo ser infinito ou cíclico de ordem n.*

Exemplo 3.4 *Considere-se f um triângulo equilátero,*

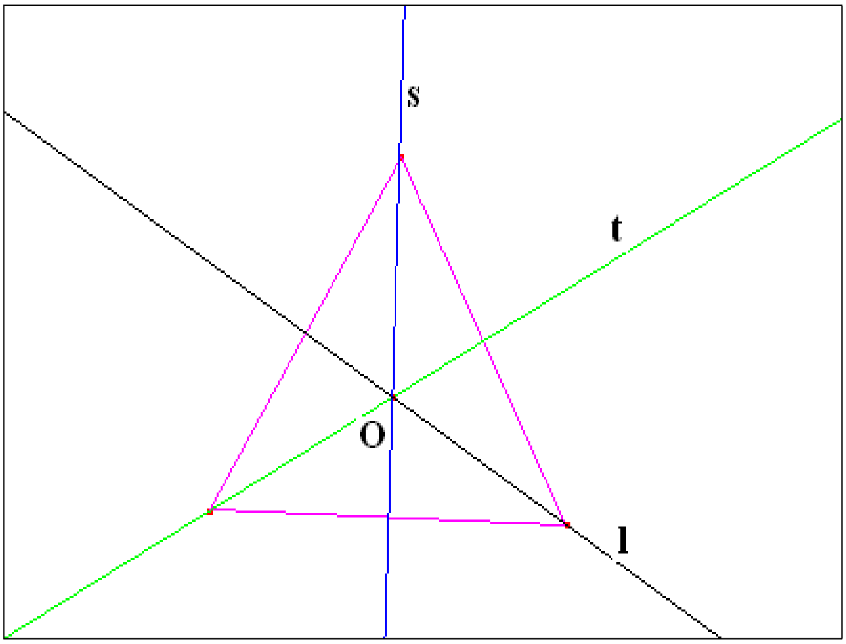


Figura 3.15:

Como podemos observar o grupo simétrico do triângulo equilátero é constituído por seis simetrias de f, ou seja,

$$S(f) = \left\{ \Theta_{(O,2\pi)}, \Theta_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)}, \Theta_{\left(O,\frac{4\pi}{3}\right)}, \Omega_l, \Omega_t, \Omega_s \right\}$$

Claro que como já vimos $\left\{ I_d, \Theta_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)}, \Theta_{\left(O,\frac{4\pi}{3}\right)} \right\}$ *é um subgrupo cíclico. O que quer dizer que um dos geradores do grupo será* $\Theta_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)}$*. O outro gerador poderá ser qualquer uma das reflexões. Estas duas simetrias só por si geram todas as outras que pertencem ao grupo. Verifiquemos:*

$$\begin{aligned}
\Theta_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ \Theta_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)} &= \Theta_{\left(O,\frac{4\pi}{3}\right)} \\
\Theta_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ \Theta_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ \Theta_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)} &= I_d \\
\Theta_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ \Omega_l &= (\Omega_t \circ \Omega_l) \circ \Omega_l = \Omega_t \\
\Theta_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ \left(\Theta_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ \Omega_l\right) &= (\Omega_s \circ \Omega_t) \circ \Omega_t = \Omega_s
\end{aligned}$$

O grupo simétrico do triângulo equilátero diz-se um grupo diedral de ordem 6 *gerado por* $\Theta_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ \Omega_l$ *e representa-se por* $\left\langle \Theta_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ \Omega_l \right\rangle = D_6$.

Observação 3.12:

Onde Ω_l, Ω_t e Ω_s são as reflexões em torno das respectivas rectas definidas pelo baricentro[4] e os vértices de f, enquanto que $\Theta_{\left(O,\frac{2\pi}{3}\right)}, \Theta_{\left(O,\frac{4\pi}{3}\right)}$ e $\Theta_{(O,2\pi)} = I_d$ são as rotações, das respectivas amplitudes em torno do baricentro (O) de f no sentido anti-horário, que também podem ser obtidas através de composições de duas reflexões Ω_l, Ω_t e Ω_s (pela definição 3.19).

Nota 3.2 *Um polígono regular tem sempre um grupo simétrico diedral de ordem igual a duas vezes o número de lados e gerado por uma rotação e uma reflexão.*

Conclusão3.1:

O conjunto das simetrias de uma qualquer configuração f, munido da operação composição, é um grupo, a que chamaremos grupo simétrico da figura f.

Intuitivamente podemos ter uma ideia de quão simétrica uma figura é que pode não resistir ao procedimento mais objectivo de quanto maior é o grupo mais simétrica é a figura. Por exemplo, um circulo é uma figura altamente simétrica. O seu grupo simétrico é constituído por todas as rotações de centro no seu centro e por todas as reflexões cujos eixos passem pelo centro do círculo. São em número infinito as suas simetrias.

Um quadrado pode parecer bastante simétrico e, no entanto, tem apenas oito simetrias.

[4] ponto de intersecção das medianas de um triangulo.

CAPÍTULO 4

O ensino das Transformações Geométricas.

4.1 Introdução

Neste capítulo a nossa preocupação centraliza-se essencialmente em, garantir que, na sala de aula, exista unanimidade (na fundamentação, exactidão) na definição dos termos geométricos[1], por forma a estabelecer um entendimento básico entre aquilo que professor e alunos dizem e entendem entre si.

Está-se, por isso, perante a questão de se saber por onde começar? É lógico começar pelos termos primitivos. Termos suficientemente simples tais como "ponto" ou "linha recta" são, na realidade, termos primitivos, isto é, não se definem. A respeito deles só podemos, com rigor, dizer que, em Geometria, "um ponto é um ponto ..." e assim sucessivamente e, embora possa parecer que designando-os como "indefinidos" estamos, porventura, a abandonar a procura de uma definição, a verdade é que para definirmos qualquer palavra precisamos de outras palavras que, por sua vez, precisam ainda de outras palavras e esta cadeia tem, necessariamente, um fim .

Então escolhem-se termos como "ponto" ou "linha recta", por serem os primeiros dessa cadeia de palavras que caracterizam outras palavras e chamamos-lhes termos indefinidos. A partir daí, servem como base para as definições de outros termos. Para além de "ponto" e "linha recta" temos, em Geometria, outros termos especialmente simples e indefinido como é o caso

[1] A dispersão de conceitos é um grande obstáculo à aprendizagem, em particular da Matemática.

de "plano".

Depois de alguns termos simples terem sido aceites como indefinidos, pode-se finalmente começar a definir outros termos.

Ponto, linha e plano são termos suficientemente simples para que os aceitemos como indefinidos.

A partir daí, imaginemos agora três sistemas diferentes de objectos: aos objectos da primeira cadeia chamemos pontos e representamo-los por letras alfabética maiúscula: A, B, C, ...; aos objectos da segunda cadeia chamemos rectas e representamo-las por letra alfabética minúsculas: a, b, c, ...; aos objectos da terceira cadeia chamemos planos e representamo-los por letras alfabética grega: α, β, γ, ... Os pontos chamam-se os elementos da geometria linear, e os pontos e rectas os elementos da geometria plana.

A Geometria, ou qualquer outro sistema dedutivo, comporta-se tal e qual um jogo. Para se jogar bem, na Geometria como nos outros jogos, têm que se conhecer e aceitar as regras básicas. Além disso, para que o "jogo" seja jogável interessa, pelo menos, garantir que:

– As regras básicas são suficientes, isto é, dizem-nos o que fazer em qualquer situação que possa surgir;

– As regras básicas são consistentes, isto é, não se contradizem umas às outras nem nos conduzem a contradições.

As regras básicas em Geometria, que se fixam de uma vez por todas e que, de facto, é necessário aceitar antes de iniciar o "jogo", chamam-se *axiomas*; são criações humanas e o aspecto que o assunto toma depende directamente da natureza dos axiomas que se escolhem.

Diferentes conjuntos de axiomas geométricos deram, ao longo dos tempos, origem a diferentes geometrias e o facto de, durante muitos séculos, a Geometria Euclidiana ser a única Geometria que se conhecia deve-se, basicamente, à duração da pesquisa que se foi desenrolando até que o Homem se apercebesse de que era possível "jogar" com diferentes conjuntos de regras.

Hoje em dia, aceitando os axiomas da Geometria Euclidiana e complementando-os com algumas regras algébricas elementares, estamos em condições de iniciar um "jogo" deveras interessante e importante com os nossos alunos do Ensino Secundário.

Uma vez que não possuímos definições que nos digam o que é que estas palavras significam, dar-lhes-emos significado axiomtizando algumas relações entre esses termos.

Entre varias axiomáticas tentativas da geometria, destacamos a de Euclides, como primeira grande axiomática da matemática; a outra é a de David

Hilbert, baseada na de Euclides, mas reconstruída em bases lógicas mais rigorosas, expurgada portanto das imprecisões euclidianas. Para os estudantes do ensino secundário e para uma abordagem elementar da geometria plana, uma escolha dos principais axiomas Hilbert/Euclidianos é suficiente para a uma fundamentação satisfatória, bem assim a iniciação dos mesmos ao método axiomático. Apresentamos então a seguinte lista:

Axioma 4.1 *Para quaisquer dois pontos, existe uma única linha recta que passa por eles.*

Axioma 4.2 *Uma linha contém pelo menos dois pontos.*

Axioma 4.3 *Para quaisquer 3 pontos não colineares, existe exactamente um plano que os contém.*

Axioma 4.4 *Se 2 pontos pertencem a um plano, então a recta que passa por esses pontos está no plano.*

Axioma 4.5 *Por um ponto exterior a um plano passa uma, e uma só recta (Axioma Euclidiana das paralelas) paralela a esse plano.*

A informação que estes axiomas nos dão pode ser utilizada para demonstrar outras relações entre pontos, rectas e planos. Por outras palavras, se aceitarmos estes cinco afirmações como sendo verdadeiras, podemos demonstrar - quer geométrica quer algebricamente - a veracidade de outras afirmações, usando um raciocínio dedutivo.

Pretendemos, acima de tudo, evitar as situações onde, a propósito do estudo da Geometria no Ensino Secundário, ouvimos dizer que "as respostas são simplesmente uma questão de opinião" ; interessa relembrar que existem outros axiomas, alguns dos quais da área da "aritmética", isto é, outros axiomas que não enunciaremos mas que importa relembrar para efeitos do tal desejável rigor e entendimento na comunicação entre professor e alunos na aula de Matemática e a propósito do ensino da Geometria dizem, por exemplo, respeito a:

Torna-se, por isso, indispensável que o professor de Matemática esteja constantemente consciente das consequências (lógicas) das afirmações que profere e do contexto em que estas são proferidas, por mais óbvias que estas pareçam por forma a poder exigir que os alunos também se comportem e ajam com o mesmo rigor.

Os objectivos do professor a este respeito são, fundamentalmente:

- Ajudar os alunos a raciocinar logicamente e nunca o de, em Geometria, criar ratoeiras onde, sem o acompanhamento e o rigor devidos, os nossos alunos ficarão inevitavelmente presos;

- Aspirar, em Geometria, a um rigor de comunicação que é constante, que é o mesmo para alunos e para professores e onde as deduções são validadas ou invalidadas com base em argumentos lógicos irrefutáveis.

Aceitar a veracidade de determinada informação é o que fazemos sempre quando ouvimos, apalpamos, saboreamos, cheiramos ou vemos os factos do mundo à nossa volta, isto é, quando fazemos uso dos nossos cinco sentidos. A seguir, tiramos conclusões e essas conclusões - verdadeiras, falsas ou simplesmente incertas - englobam uma justificação, isto é, um raciocínio subjacente.

Ora, em Geometria, repetimos tão-sómente este processo geral de abordar os problemas com que somos confrontados: partimos dos factos, a que chamamos axiomas (cuja veracidade ou falsidade não é ditada pela Lógica), que também nos são ditados pelos sentidos e vamos (com a ajuda da Lógica) deduzindo conclusões que pretendemos verdadeiras.

4.2 Referencial Teórico Elementar

4.2.1 Reflexão

A primeira das isometrias que iremos estudar é a reflexão. Em termos de imagem mental essa transformação corresponde à aplicação de um espelho, ainda que tenhamos de imaginar um espelho com apenas duas dimensões quando analisamos o caso do plano.

Para definirmos de forma mais rigorosa reflexão precisamos da noção de mediatriz de um segmento de recta.

Definição 4.1 ***Mediatriz de um segmento de recta*** *é a recta formada pelos pontos do plano que estão a igual distancia dos pontos extremos do segmento.*

Na figura descrevemos como podemos obter a reflexão de um ponto P pertencente a $\mathbb{R}^2$ por uma recta r.

Reflexão de P em torno da recta r.

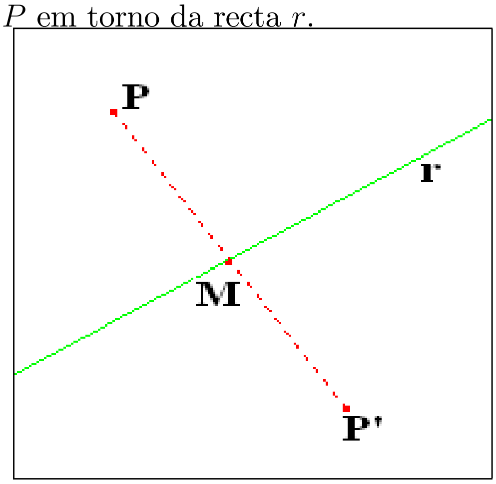


Figura 4.1:

A recta r é a mediatriz do segmento de recta $\overline{PP'}$
M é o ponto médio do segmento de recta $\overline{PP'}$

Definição 4.2 ***Segmento de recta*** *é a porção de recta compreendida entre dois pontos. Estes dois pontos, que são os dois limites do segmento, chamam-se* ***extremos****.*

Definição 4.3 ***Ponto médio do segmento de recta*** *é o ponto do segmento que está a igual distância dos pontos extremos.*

Definição 4.4 ***Simetria axial do plano ou reflexão na recta*** r *é a transformação geométrica que fixa todos os pontos de uma recta dada* r *e associa a cada ponto do plano, não pertencente a* r*, o ponto* P'*, de modo que* r *é a mediatriz do segmento* PP'*. A recta* r *chama-se eixo de simetria, e os pontos* P *e* P' *são chamados pontos simétricos em relação* r*. A reflexão denota-se por* R_r*, lendo-se reflexão ao longo da recta* r*.*

Exemplo 4.1 *Desenhamos o triângulo* $\triangle[ABC]$ *e a recta* r*. Dobrando a folha da figura pela recta* r*, e por decalque do triângulo* $\triangle[ABC]$ *obtivemos o triângulo* $\triangle[A'B'C']$*.*

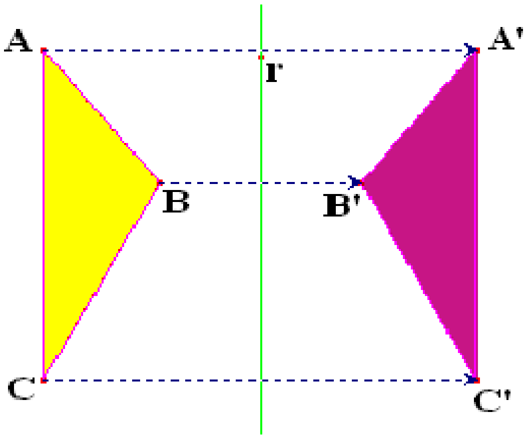


Figura 4.2:

Os triângulos $\triangle [ABC]$ e $\triangle [A'B'C']$ são simétricos e assim:

A' é o simétrico de A, isto é, $A \to A'$.

B' é o simétrico de B, isto é, $B \to B'$.

C' é o simétrico de C, isto é, $C \to C'$.

O lado $[A'B']$ é o simétrico do lado $[AB]$.

O lado $[B'C']$ é o simétrico do $[BC]$.

O lado $[C'A']$ é o simétrico do $[CA]$.

Então:

O triângulo $\triangle [A'B'C']$ é o transformado do triângulo $\triangle [ABC]$ por meio da simetria de eixo r.

Invariantes. Quanto a pontos invariantes por uma reflexão, a própria definição indica-nos quais são eles: Todos os pontos da recta sobre o qual se faz a reflexão. E não pode haver outros.

Se um ponto P está a uma certa distância a da recta r, a sua imagem P' estará necessariamente a duas vezes essa distância do original P.

Quando efectuamos uma reflexão Ω_r de uma figura F, pode existir algum ponto nessa figura que permaneça invariante, embora a figura se modifique globalmente, como no caso de uma recta concorrente com r que não lhe seja perpendicular.

Mas o mais interessante é o caso em que a figura permaneçe globalmente invariante, independentemente de os seus pontos se terem ou não modificado.

Por exemplo se considerarmos uma recta s perpendicular à recta r, a sua imagem é a própria recta s, apesar de só o ponto de encontro das duas rectas permanecer invariante. Quer dizer, todos os outros pontos da recta s se deslocam, mas a recta permanece globalmente invariante.

4.2.2 Vectores

Vamos definir vector a partir de segmentos orientado.

Sejam A e B dois pontos quaisquer do plano, podemos ter dois segmentos de recta orientados diferentes, um de A para B, outro de B para A, ambos com a mesma direcção e comprimento, mas sentidos opostos. Um **segmento de recta orientado** será sempre determinado pelo seu comprimento, direcção e sentido. Se dois segmentos de recta orientados têm a mesma direcção, sentido e comprimento, eles são considerados equivalentes.

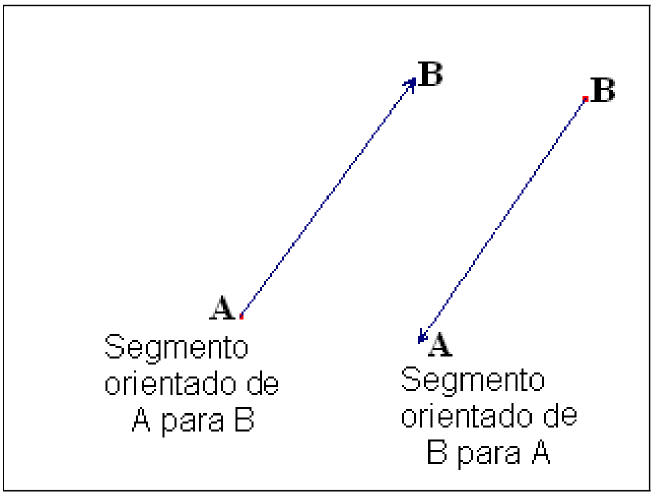


Figura 4.3:

Podemos assim estabelecer uma nova noção, mais conveniente, que é a de vector:

Definição 4.5 *Chamamos vector a entidade definida por uma direcção, sentido e comprimento.*

Observação.4.1:

Um vector não está condicionado por dois pontos, embora possa ser representado por qualquer segmento de recta orientado que tenha essa direcção, sentido e comprimento. Podemos assim falar de vector $\overrightarrow{AB}$ (ou até denotarmos com uma só letra, $\overrightarrow{u}$)

Definição 4.6 *Soma de um ponto P com um vector $\overrightarrow{v}$ é um ponto P' tal que $PP' = \overrightarrow{v}$.*

Escreve-se: $P + \overrightarrow{v} = P'$

É assim mais conveniente falar de translação associada a um vector que veremos de seguida.

4.2.3 Translação

A segunda das isometrias que iremos tratar é a translação. Em termos de uma imagem mental, a translação corresponde a uma deslocação rectilínea.

Definição 4.7 *Translação de vector $\overrightarrow{v}$ é a transformação geométrica no plano que, dado um vector $\overrightarrow{v}$ a cada ponto P do plano associa o ponto P', de modo que o vector PP' seja igual a $\overrightarrow{v}$. Recorrendo ao conceito de "soma de um ponto com vector", podemos então escrever:*

$$T_{\overrightarrow{v}} : P \longmapsto P' = P + v$$

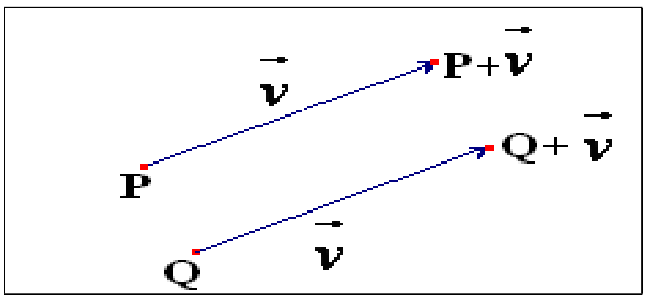


Figura 4.4:

Propriedades

(i) *Existência de elemento neutro;*

A translação associada ao vector nulo (identidade) é elemento neutro para a composição no conjunto das translações.

Então: $T_{\overrightarrow{o}}(A) = A$; $T_{\overrightarrow{o}}(B) = B$; $\tau_{\overrightarrow{o}}(C) = C$

(ii) *Existência de inverso;*

Compondo duas translações simétricas, o resultado é a identidade, já que os pontos não se deslocam. Isto mostra a existência de inverso para cada translação.

Então: $T_{\overrightarrow{v}} \circ T_{-\overrightarrow{v}} = T_{(\overrightarrow{v}+(-\overrightarrow{v}))} = T_{\overrightarrow{o}}$

(iii) *Associativa;*

$$(T_{\overrightarrow{v}} \circ T_{\overrightarrow{u}}) \circ T_{\overrightarrow{w}} = T_{\overrightarrow{v}} \circ (T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{w}})$$

(iv) *Fecho;*

$$T_{\overrightarrow{v}} \circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{v}\,+\,\overrightarrow{u}}$$

Invariantes. A questão das figuras invariantes por uma translação merece desde já uma menção, ainda que se venha a aprofundar mais a frente (em frisos subsecção 4.3.3). Podemos constatar que uma recta paralela ao vector permanece globalmente invariante por efeito da translação associada a esse vector.

Numa translação $\tau_{\overrightarrow{v}}$ não há pontos invariantes se $\overrightarrow{v} \neq 0$.

4.2.4 Rotação

A terceira das isometrias que iremos tratar chama-se rotação. Em termos de imagem mental, podemos pensar no que se passa quando ponteiro de um relógio se desloca.

Olhemos com atenção os ponteiros do relógio em baixo, Estes quando em funcionamento, efectuam um movimento em torno de um ponto.

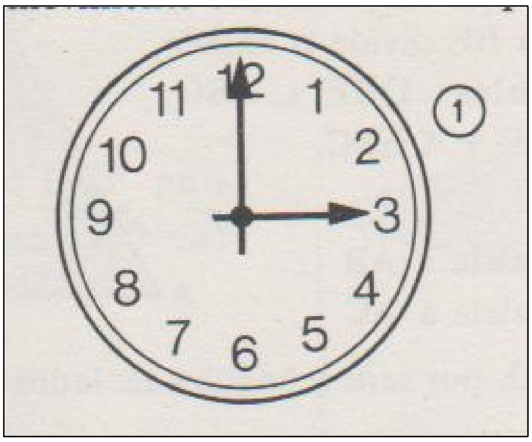


Figura 4.5:

Para definir mais rigorosamente rotação teremos de pensar, tal como fizemos para a translação, em termos orientação, neste caso em ângulo orientado. Quer dizer, teremos de pensar que uma das semi-rectas é primeira em relação à outra. Assim, quando falamos de ângulo, poderemos ter sempre dois tipos de ângulo, como já sabemos: convexo e concavo. Pois agora, poderemos ter, para cada um dos tipos, duas possibilidades, o ângulo orientado no sentido do ponteiro dos relógios (chamado sentido directo) e o ângulo orientado no sentido contrário ao ponteiro dos relógios (chamado sentido retrógrado).

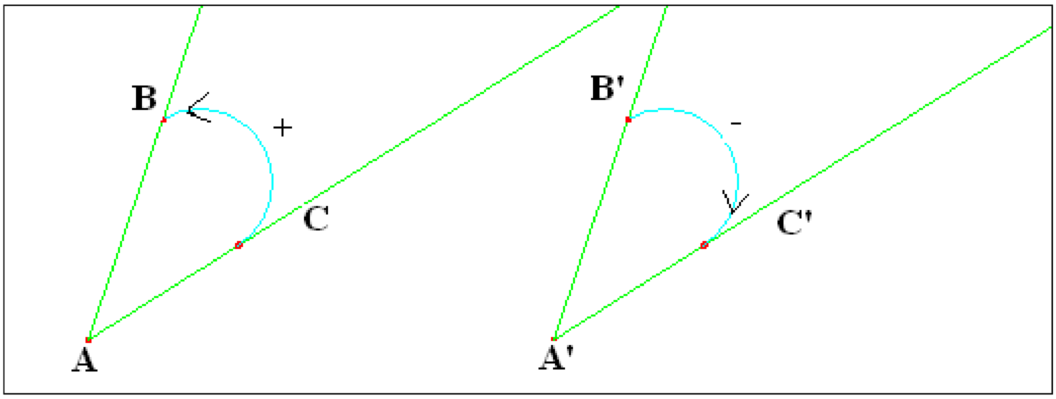


Figura 4.6:

A partir dos exemplos podemos reparar que a figura rodou em torno do ponto A. Quer os ponteiros do relógio quer o da figura 4.6 executaram um movimento que se chama **movimento de rotação**.

A definição de rotação pode resumir-se no seguinte:

Rotação de centro O **e ângulo** α (entre 360° e +360°) é uma transformação geométrica que, dado o ponto O e um ângulo α, fixa o ponto P do plano, distinto de O, associa o ponto P' de modo que o ângulo orientado POP' seja congruente a α e as medidas dos segmentos PO e $P'O$ sejam iguais. A rotação denota-se por $R_{(o,\alpha)}$, lendo-se rotação de centro O e de amplitude α.

$$R_{(o,\alpha)} : P \longmapsto P' : \left\{ \begin{array}{c} \overline{OP'} = \overline{OP} \\ amp\left(O^{\circ}P, O^{\circ}P'\right) = \alpha \end{array} \right.$$

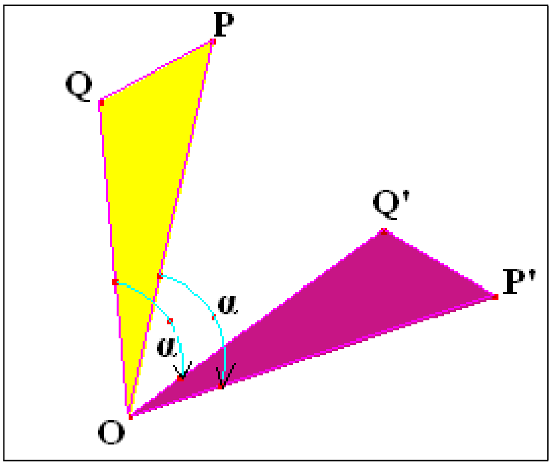


Figura 4.7:

Invariantes. Logo os triângulos coloridos são iguais, portanto $\overline{P'Q} = \overline{PQ}$. Analogamente se prova que transforma um ângulo noutro igual.

4.2.5 Simetria Central

Definição 4.8 ***Simetria Central ou Simetria Central de centro*** **C** *é a transformação do plano em si mesmo que faz corresponder:*

- Ao ponto C, o próprio ponto.

- A qualquer outro ponto P, um ponto P, situado na semi-recta oposta de $C^{\circ}P$ e tal que $PC = CP'$.

Pode ser definida directamente:

$$S_C : P \to P' = C + PC$$

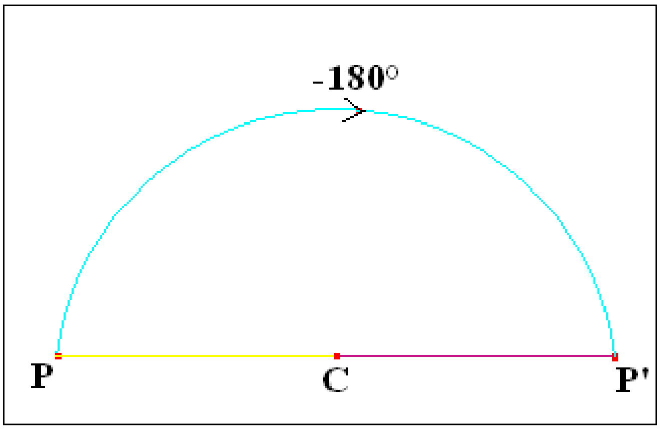


Figura 4.8:

Nota 4.1 *Uma simetria central de centro C é uma rotação de centro C e amplitude +180° (ou -180°) .*

4.2.6 Reflexão deslizante

A quarta isometria que iremos abordar neste trabalho chama-se reflexão deslizante. Em termos de imagem mental corresponde à criação de uma imagem reflectida num espelho unidimensional, seguida da deslocação na direcção desse espelho. Talvez mais simples seja considerar um exemplo que é o das pegadas deixadas por um homem andando em linha recta.

Definição 4.9 *Chama-se reflexão deslizante à composta de uma reflexão sobre r, com uma translação em que o vector associado u tem a mesma direcção de r. A reflexão deslizante denota-se por $\Delta_{(r,\ \vec{u})}$.*

Quando temos uma figura qualquer, para ver qual a imagem dele pela reflexão deslizante $\Delta_{(r,\ \vec{u})}$, temos de executar as duas transformações translação e reflexão. A ordem em que fazemos não é importante, já que no fim iremos obter a mesma imagem.

Quando aplicamos uma reflexão deslizante a todos os pontos de uma figura, é como se deslocássemos a figura como um todo, obtendo uma nova figura.

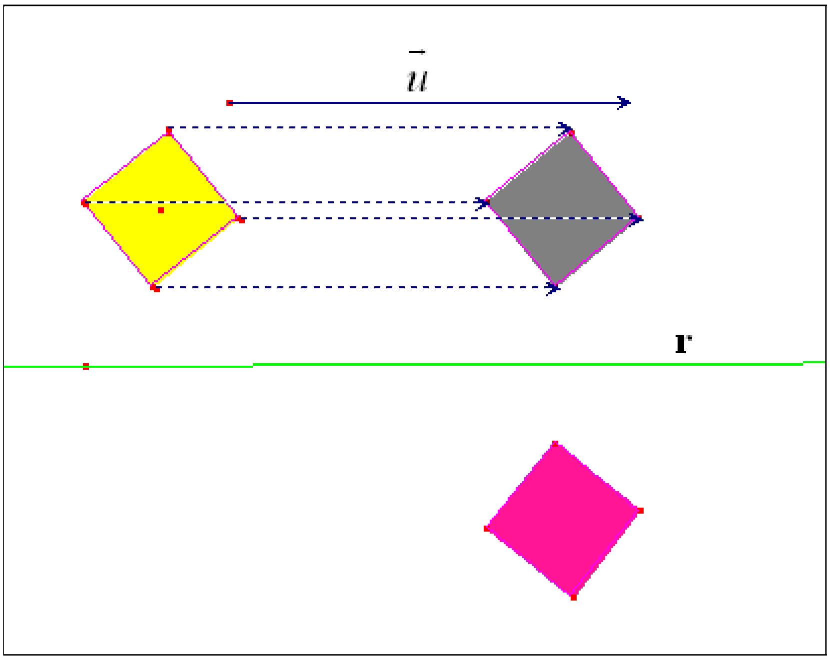


Figura 4.9:

Um caso muito especial é aquele em que a translação tem um vector nulo como associado. Mas neste caso, apesar de o vector nulo ter a direcção de eixo de reflexão – o vector nulo tem, de facto, todas as direcções – não podermos considerar como uma reflexão deslizantes já que o que temos dessa forma é uma reflexão apenas.

Invariante. Numa reflexão deslizante não há pontos invariantes. Apesar de a reflexão deixar todos os pontos de eixo de reflexão invariantes, a translação desloca todos os pontos segundo a direcção de eixo. Mas, pensando em figuras, evidentemente que o eixo de reflexão permanece globalmente invariante. Todos os pontos se deslocam, mas a recta permanece globalmente invariante. Também se considerarmos figuras que sucessivamente são imagens uma das outras pela reflexão deslizante e se pensarmos na figura global que inclui todas essas figuras, sem que uma seja a primeira ou última, então essa figura global também permanece globalmente invariante (por exemplo, uma sucessão infinitas de pegadas ao de eixo de reflexão).

4.3 Composição de isometrias no plano

Neste item vamos ter a oportunidade de analisar algumas situações interessantes envolvendo composição de isometrias planas de uma forma menos abstracta.

4.3.1 Composição de duas simetrias axiais de eixos paralelos

Demonstração:

Quando compomos duas reflexões de eixos paralelos, os dois eixos tem uma certa distância entre eles. Essa distância pode ser obtida a partir do comprimento de um segmento pertencente a uma recta perpendicular as duas rectas.

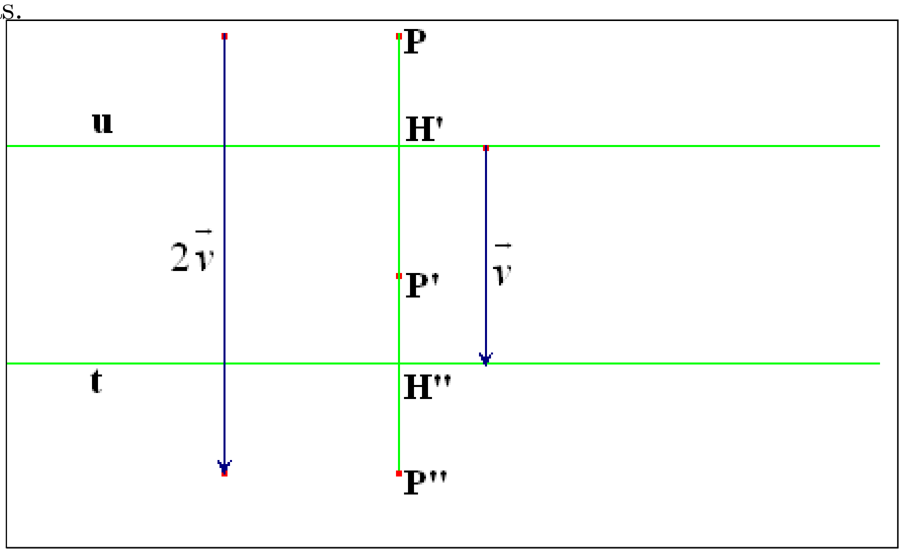


Figura 4.10:

Pela definição de reflexão a partir da figura temos:

$$\begin{aligned} R_u(P) &= P';\ R_t(P') = P'' \\ PP' \cap u &= H'; PP'' \cap t = H'' \end{aligned}$$

Portanto $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{H'H''}$ é um vector perpendicular a os dois eixos e cuja norma é a distancia entre eles, e $\tau_{\overrightarrow{H'H''}}$ aplica u sobre t

$(R_t \circ R_u)(P) = R_t[R_u(P)] = P''$ e $\overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''} = 2\overrightarrow{H'P'} + 2\overrightarrow{P'H''} = 2\overrightarrow{H'H''}$

Portanto $R_t \circ R_u = \tau_{2\overrightarrow{H'H''}}$

Nota 4.2 *Estas simetrias não são permutáveis:* $R_u \circ R_t \neq \tau_{2\overrightarrow{H'H''}} = R_t \circ R_u$

Conclusão 4.1:

Resumindo as várias conclusões parcelares, aquilo que se verifica para a composta de duas reflexões de eixos paralelos é uma translação de direcção perpendicular às duas rectas, sentido da primeira para a segunda e comprimento igual a duas vezes a distância entre as duas rectas.

Um facto de grande importância que iremos usar no seguimento é o seguinte. se a composta de duas reflexões de eixos paralelos é uma translação também é verdade, ainda que não de forma única, que uma translação também pode ser substituída por uma composta de duas reflexões de eixos paralelos, com a distancia entre elas igual a metade do comprimento do vector. Teremos de ter em atenção a ordem das rectas, respeitando o sentido do vector e, evidentemente, há muitos pares de rectas que servem para eixos de reflexão, isto para cada translação em particular.

4.3.2 Composição de duas reflexões de eixos concorrentes

Demonstração:

Consideremos agora duas reflexões quaisquer mas de eixos concorrentes. Denotemos por e_1 e e_2 as duas rectas concorrentes e por O o ponto de intersecção das duas rectas. Consideremos ainda que no sentido directo, em torno de O.

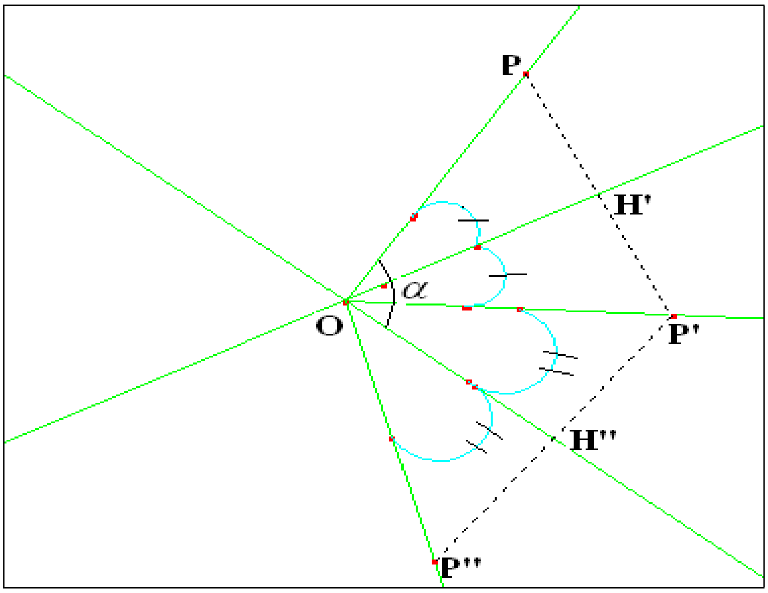


Figura 4.11:

Então pela definição de simetria axial temos: $R_{e_1}(P) = P'$; $R_{e_2}(P') = P''$

$PP' \cap e_1 = H'; PP'' \cap e_2 = H''$

Portanto $(O^\circ H', O^\circ H'')$ é um ângulo orientado de amplitude α tal que $R_{(o,\alpha)}$ aplica e_1 sobre e_2.

Ora $(R_{e_2} \circ R_{e_1})(P) = R_{e_2}[R_{e_1}(P)] = P''$,

Sendo $(O^\circ P, O^\circ P'') = (O^\circ P, O^\circ P') + (O^\circ P', O^\circ P'') = 2(O^\circ H', O^\circ H'') = 2\alpha$

Além disso $OP'' = OP' = OP$

Portanto $R_{e_2} \circ R_{e_1} = R_{(o,2\alpha)}$

Nota 4.3 *Esta simetrias não são permutáveis:* $R_{e_1} \circ R_{e_2} \neq R_{(o,2\alpha)} = R_{e_2} \circ R_{e_1}$

Conclusão 4.2:

Temos assim que a composta de duas reflexões de eixos concorrentes é uma rotação de centro no ponto de intersecção dos eixos e de amplitude igual a duas vezes a amplitude do ângulo formado pelas rectas.

Da mesma forma que fizemos para a translação, também é possível substituir uma rotação qualquer por uma composta de duas reflexões de eixos concorrentes no centro da rotação. A condição é que o ângulo entre as rectas tenha de amplitude metade da amplitude da rotação.

Também como vimos já para as translações, tal substituição não se pode fazer de modo único, já que existe uma infinidade de pares de rectas nas condições descritas.

4.3.3 Composição de duas rotações.

Demonstração:

A partir desta possibilidade de substituição da rotação por uma composta de duas reflexões, estamos agora em condições de analisar a questão de saber qual é a composta de duas rotações.

Consideremos duas rotações quaisquer (de centros diferentes, com o mesmo centro já analisamos atrás) $R_{(O,\alpha)}$ e $R_{(O',\beta)}$. Qual a resultante de $R_{(O',\beta)} \circ R_{(O,\alpha)}$?

Podemos substituir $R_{(O,\alpha)}$ por uma composta de duas reflexões de eixos concorrentes em O e amplitude do ângulo entre os eixos igual a metade de α. Será $R_{(O,\alpha)} = R_{e_2} \circ R_{e_1}$, com e_1 e e_2 a obedecer às condições descritas. Juntaremos outra condição suplementar que é a de e_2 passar por pelo ponto O'. Da mesma forma podemos substituir $R_{(O',\beta)}$ por uma composta de duas reflexões de eixos concorrentes em O' e com amplitude do ângulo entre eles formado igual a metade de β. Ora, havendo uma infinidade de pares de rectas nestas condições, podemos impôr que uma das rectas seja uma das atrás usadas na substituição de $R_{(O,\alpha)}$. Trata-se da recta e_2, que na divida altura impusemos que passa por O'. Seja então $R_{(O',\beta)} = R_{e_3} \circ R_{e_2}$.

Assim $R_{(O',\beta)} \circ R_{(O,\alpha)} = (R_{e_3} \circ R_{e_2}) \circ (R_{e_2} \circ R_{e_1})$, e pela associatividade da composição, $R_{(O',\beta)} \circ R_{(O,\alpha)} = R_{e_3} \circ (R_{e_2} \circ R_{e_2}) \circ R_{e_1}$; Sabemos que $R_{e_2} \circ R_{e_2} = I_d$ (isto é, uma reflexão com ela própria é a transformação identidade), o que faz com que $R_{(O',\beta)} \circ R_{(O,\alpha)} = R_{e_3} \circ R_{e_1}$, isto é a composta de duas rotações é igual à composta de duas reflexões.

Nota 4.4 *Se os eixos de reflexão fossem sempre concorrentes, poderíamos concluir que era sempre uma rotação e, portanto, juntando ao resultado da composição de duas rotações com o mesmo centro, teríamos que a composta de duas rotações seria sempre uma rotação. No entanto, isto não é verdade. Consideremos a rotação em torno do ponto O de amplitude 180º e a rotação em torno de O' também de amplitude 180º. Quando substituímos as duas rotações pelo processo a trás descrito, os eixos e_3 e e_2 formam também um ângulo de de 90º. Assim, conclui-se que e_1 e e_3 são rectas paralelas e, portanto, neste caso, $R_{e_3} \circ R_{e_1}$ é uma translação.*

Conclusão 4.3:

Desta forma resulta, como é evidente, que o conjunto de todas as rotações não pode ser um grupo, já que lhe falta a propriedade de fecho.

4.3.4 Composição de uma rotação com uma translação (vice-versa)

Há dois casos a considerar:

Caso1: $T_{\overrightarrow{u}} \circ R_{(O,\alpha)}$

Substituindo $R_{(O,\alpha)} = R_{e_2} \circ R_{e_1}$ (pela composição 4.3.2) . e também pela (composição 4.3.1) vimos que: $T_{\overrightarrow{u}} = R_{e_3} \circ R_{e_2}$

Temos assim $T_{\overrightarrow{u}} \circ R_{(O,\alpha)} = (R_{e_3} \circ R_{e_2}) \circ (R_{e_2} \circ R_{e_1})$, atendendo a associatividade, teremos $T_{\overrightarrow{u}} \circ R_{(O,\alpha)} = R_{e_3} \circ (R_{e_2} \circ R_{e_2}) \circ R_{e_1}$.

Também $T_{\overrightarrow{u}} \circ R_{(O,\alpha)} = R_{e_3} \circ R_{e_1}$ (pois, a composta de uma reflexão com ela própria é a transformação identidade)

Quer dizer, que obtemos para a composta de uma rotação com uma translação a composta de duas reflexões.

Ora, como já vimos a composta de duas reflexões é sempre uma rotação ou uma translação, podendo ser identidade no caso particular da composta de uma reflexão com ela própria, mas a identidade é também uma rotação de amplitude $0°$ ou uma translação associada ao vector nulo.

Caso 2: É análogo ao caso 1.

4.3.5 Composição de uma translação com uma reflexão

Podemos constatar isso com trivialidade uma vez que uma translação poderá ser substituída por uma composição de duas reflexões de rectas paralelas.

Nota 4.5 *As translações, rotações e reflexões transformam segmentos de recta em segmentos de recta e ângulos em ângulos geometricamente iguais. Mas,*

*– As **translações** mantêm a direcção dos segmentos; mantêm o sentido dos ângulos orientados.*

*– As **rotações** não mantêm a direcção dos segmentos; mantêm o sentido dos ângulos orientados.*

*– As **reflexões** não mantêm a direcção dos segmentos; invertem o sentido dos ângulos orientados.*

4.4 Aplicações

4.4.1 Motivos e Padrões

Existem em todos os lados desenhos obtidas por repetição de um motivo único: vidros de janela, telhas de um tecto, tábuas de madeira de uma cerca, tijolos de um muro, travessa de um caminho-de-ferro, troncos empilhados, arvores da floresta, papel pintado, tecidos pano de terra. Encontramo-los não somente nos objectos produzidos pelo homem, o cristal de neve visto ao microscópio revela um magnifico, modelo hexagonal, a coroa das flores, o ananás a pinha e mesmo o modesto cristal de sal comum.

Nessas situações a regularidade e a beleza são devidas a uma estrutura matemática subjacente da qual mesmo um artista pode não estar parcialmente consciente.

O conhecimento dessa estrutura é portanto indispensável a quem deseja analisar e interpretar esses fenómenos, ao cristalografista, e aos pesquisadores que se ocupam da separação da estrutura molecular a partir de redes de difracção dos raios X [21].

Nesta secção pretendemos abordar resumidamente e de um ponto de vista elementar compatível com o nosso principal público alvo (os estudantes e professores do 1° ciclo) a aplicação e a utilidade das simetrias na arte.

Se olharmos com atenção à nossa volta, observamos que em vários objectos existem padrões, que se repetem segundo diferentes regras.

Observemos as seguintes figuras:

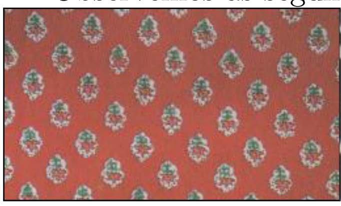


Figura 4.12:

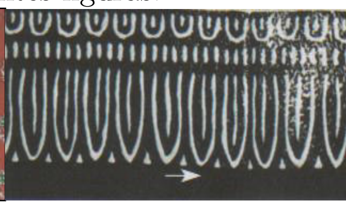


Figura 4.13:

Figura 4.14:

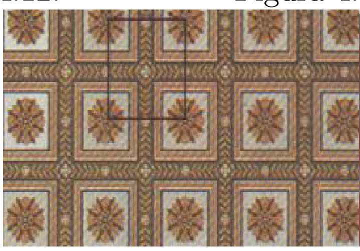


Figura 4.15:

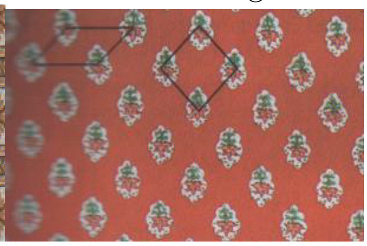


Figura 4.16:

Podemos observar que em ambas as figuras há um motivo que se repete, formando um padrão.

A disposição das cópias desse motivo caracteriza o padrão.

4.4.2 Frisos

Nesta subsecção retomamos o estudo do grupo numa direcção ou grupo de frisos focalizada na secção 3.4.

Tal como os padrões, os frisos podem obter-se através de diversas isometrias, no entanto apenas aplicadas numa direcção.

Se considerarmos uma figura, seja ela qual for, e a repetirmos sucessivamente, portanto, de $T_{\vec{v}}$ como por $T_{-\vec{v}}$, obtemos uma sucessão de figura na mesma direcção. Se a isto impusermos que nunca exista uma primeira ou uma ultima, esta sucessão de figuras permanece invariante face a aplicação de $T_{\vec{v}}$ (ou de $T_{-\vec{v}}$).

$$...F \quad F \quad F \quad F \quad F \quad F \quad F \quad F...$$

A este tipo de figura global chama-se friso. Trata-se de uma figura que permanece invariante por efeito de uma translação em particular (ou da sua inversa).

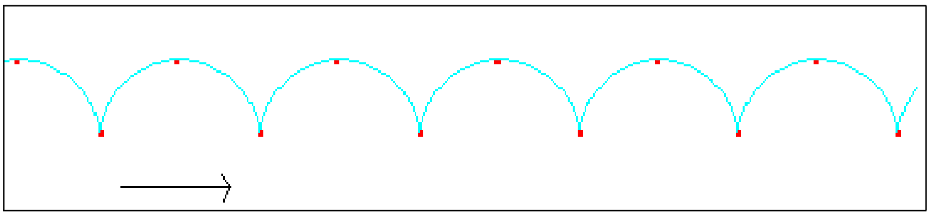


Figura 4.17: Cicloide

Observação 4.1:

Repare-se que cada uma das figuras particulares, por efeito de $T_{\vec{v}}$, é transformada na seguinte, vindo a anterior ocupar o seu lugar, de forma que globalmente não há modificação.

Existem sete tipos diferentes de frisos e torna-se importante distingui-los para o estudo, por exemplo de pano de terra "das barras de tapetes de Arraiolos" ou para as fachadas dos edifícios:

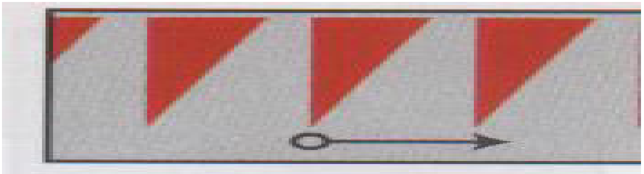


Figura 4.18: Segundo o vector traçado na figura.

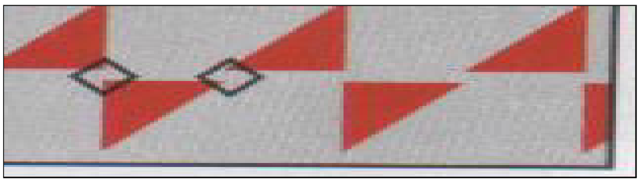


Figura 4.19: Além de translações tem meias-voltas.

Figura 4.20: Efectuou-se uma reflexão deslizante.

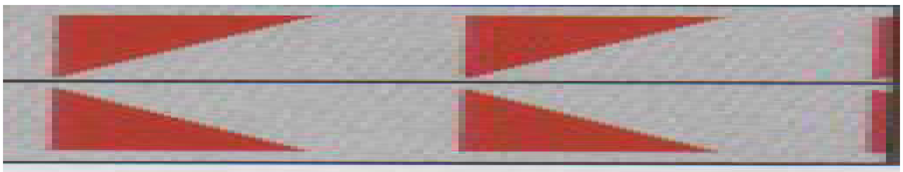


Figura 4.21: Reflexão de simetria de eixo horizontal antes de ser repetido.

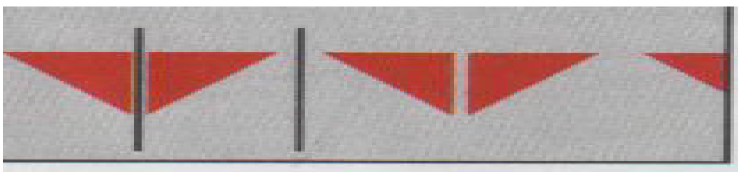


Figura 4.22: Reflexao de eixo vertical antes de ser repetido.

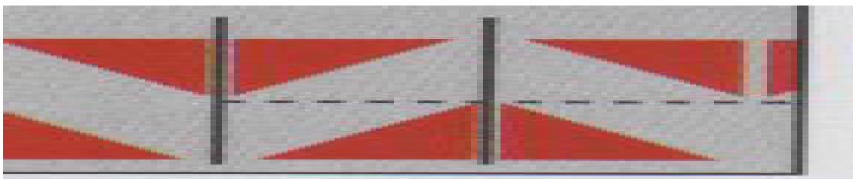


Figura 4.23: Repetição do motivo seguido duma reflexão "deslizante".

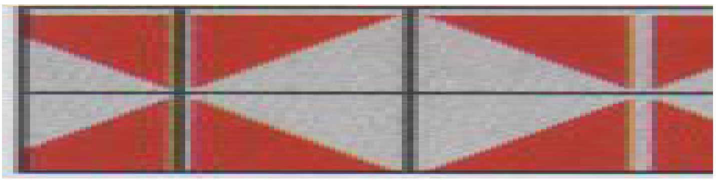


Figura 4.24: Reflexões de eixos vertical e horizontal.

Alguns exemplos de frisos aplicados na arte:

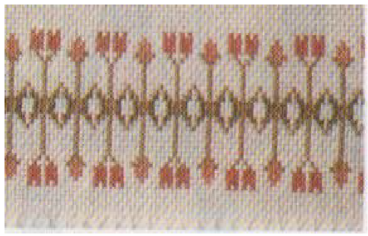


Figura 4.26: Em barras de tapetes de Arraiolos. Figura 4.27: Em toalhas.

Figura 4.28: Na arquitectura.Figura 4.29: Na arte decorativa.

4.4.3 Pavimentações

Definição 4.10 *Uma pavimentação do plano é um conjunto de padrões (ladrilhos) que cobre completamente uma superfície, sem sobreposições nem espaços intermédios.*

Estes padrões podem ser alguns polígonos convexos, mas existem polígonos não convexos que também permitem a pavimentação.

Tipos de Pavimentação

Pavimentações monoédricas ou puras: são pavimentações formadas por um único ladrilho.

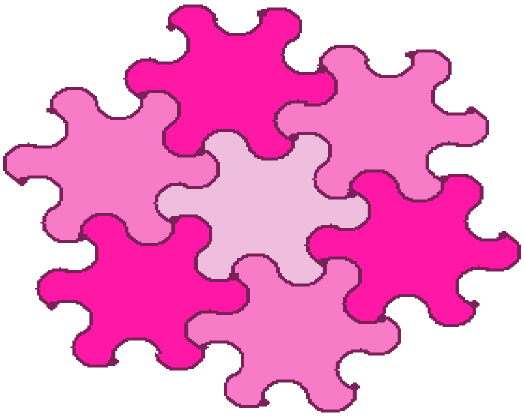
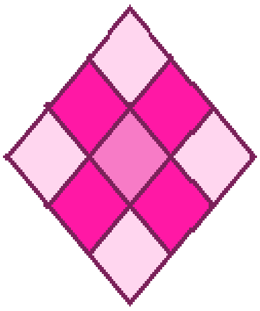


Figura 4.30:

Pavimentações regulares: são pavimentações monoédricas em que os ladrilhos são polígonos regulares congruentes (ou seja, com o mesmo tamanho e forma).



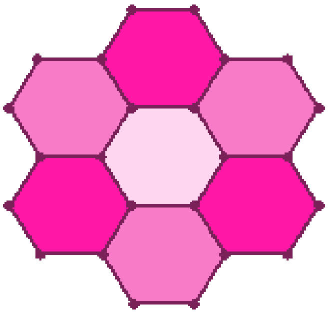


Figura 4.31: Figura 4.32:

Não são consideradas pavimentações regulares todas aquelas em que a cada vértice concorre pelo menos um dos lados do polígono.

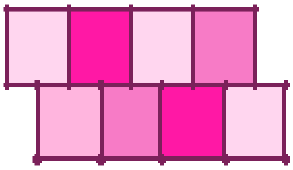


Figura 4.33:

Nem todos os polígonos regulares pavimentam. De facto, para que um polígono regular pavimente a soma da medida dos ângulos internos em torno de cada vértice tem de ser 360^o. Temos então que as únicas pavimentações regulares possíveis são aquelas em que o ladrilho é um triângulo equilátero, um quadrado ou um hexágono regular. No caso do pentágono regular, como os ângulos internos têm de amplitude 108°, esta pavimentação já não é possível, pois $3 \times 108° = 324°$, o que não cobre o plano, e$4 \times 108° = 432°$, o que dá origem à sobreposição.

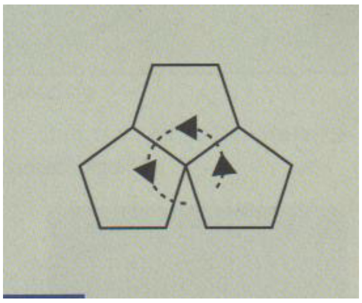


Figura 4.34:

Com pentágono regulares não é, portanto, possível a pavimentação do plano, mas existem pentágonos irregulares que o permitem.

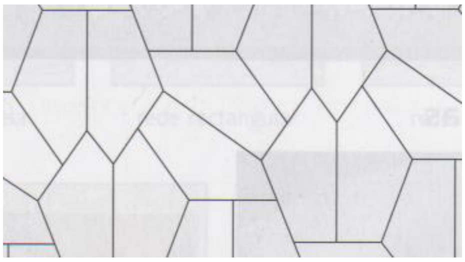


Figura 4.35:

Pavimentações arquimedianas ou semi-regulares: são pavimentações formadas por dois ou mais polígonos regulares e em que os vértices da pavimentação são todos do mesmo tipo.

Existem muitas possibilidades de associar polígonos regulares de diferentes tipos, e o modo como se distinguem é através da disposição dos diferentes polígono em torno dos vértices.

Para identificar o vértice, utiliza-se um código que tem em conta:

- O tipo de polígonos regulares;
- O numero de polígonos;
- A ordem circular em que aparecem, como se exemplifica na figura abaixo.

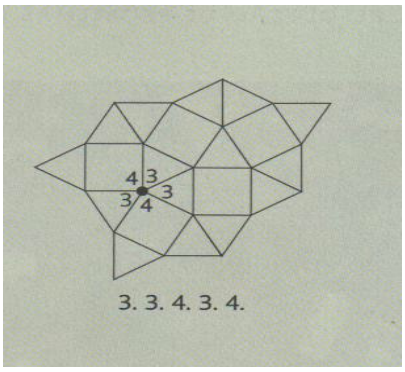


Figura 4.36:

Com polígonos regulares existem 21 tipos de vértices, dos quais se apresentam dois deles:

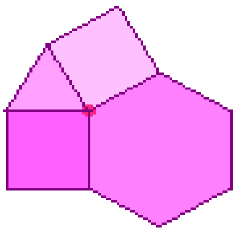


Figura 4.37:

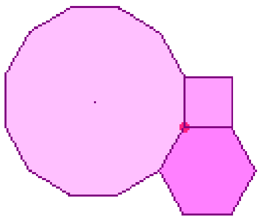


Figura 4.38:

Com polígonos não convexos também é possível fazer pavimentações. Por exemplo, Escher utilizou este tipo de pavimentação no seguinte estudo sobre "Cavaleiros":

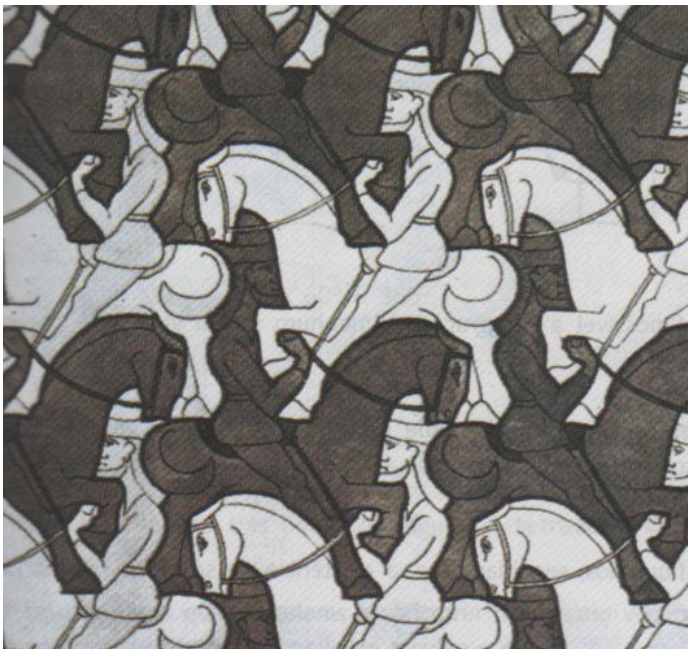


Figura 4.39:

4.4.4 Rosáceas

A rosácea é um elemento arquitectónico ornamental usado no seu auge em catedrais durante o período gótico. Dentro do eixo condutor deste período artístico, a rosácea transmite, através da luz e da cor, o contacto com a espiritualidade e a ascensão ao sagrado. As rosáceas são geradas a partir de motivos através de rotações de modo a preencher um círculo.

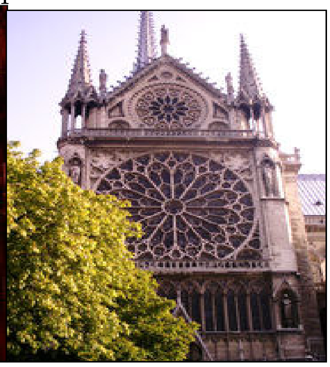


Figura 4.40: Figura 4.41:

CAPÍTULO 5

Algumas noções de didáctica da matemática e das transformações geométricas.

5.1 Introdução

Neste capítulo, dado que a importância da matemática em qualquer plano de estudos provém não só das suas múltiplas aplicações à Ciência e à Técnica como, principalmente, da justeza do seu método, que, no dizer de Blaise Pascal, parece dar àqueles que o cultivam um "sentimento especial".

Por isso mesmo "no ensino da Matemática deve preponderar o seu valor formativo visto que a aquisição duma disciplina mental é talvez o elemento mais valioso de toda a educação científica"[10].

A geometria intuitiva e prática é estudada no 1°ciclo do ensino secundário, segue-se naturalmente a sua fundamentação, ou melhor, a sua construção por método racional e indutivo, posteriormente. Vamos propor uma abordagem com um percurso tendencialmente intuitivo afim de partilhar o conhecimento a cerca do tema com o público alvo.

As transformações geométricas, no Ensino Secundário, são ferramentas para o estudo de propriedades de figuras geométricas. Num curso superior, passam a ser objecto de estudo com o objectivo de classificar as diferentes geometrias por grupos de transformações. Mas aqui vamo-nos debruçar em especial e em particular sobre o ensino secundário.

Dentre os estudos, pesquisas e teorizações que dão sustentação à educação matemática seleccionamos alguns que por suas características próprias poderiam ajudar-nos a melhor explicitar e fundamentar, didacticamente, o trabalho proposto.

Apresentamos, de seguida, uma síntese dos estudos extraídos das pesquisas da teoria das situações didácticas de Brousseau [6] e da dialéctica ferramenta-objecto de Douady [12], bem como exemplos de aplicações as transformações geométricas.

5.2 A teoria das situações didácticas segundo Brousseau

Brousseau propôs uma modelação do processo de aprendizagem envolvendo professor, aluno e saber matemático.

Para Brousseau

O aluno aprende adaptando-se a um meio, factor de dificuldades, de contradições, um pouco como faz a sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas novas respostas que são a prova da aprendizagem (Brousseau, 1987, p48 e 49).

Entretanto, o meio, sem intenções didácticas, não é suficiente para a aquisição de conhecimentos matemáticos. Cabe ao professor propor problemas que provoquem nos alunos as adaptações necessárias à aprendizagem.

Por "**situação**", entende-se o conjunto de circunstâncias em que um individuo se encontra envolvido, um conjunto de elementos que caracterizam uma acção. Uma *situação-problema* é um exemplo de "situação" que demanda uma adaptação e uma resposta. Quando na situação se manifesta directa ou indirectamente vontade de ensinar, caracteriza-se o que se chama **situação didáctica.**

Brousseau define situação didáctica como:

O conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo meio (contendo eventualmente instrumentos ou objectos) e um sistema educativo (o professor), para fazer esses alunos adquirirem um saber constituído ou em constituição (Almouloud, 1997, p. 65).

As orientações didácticas actuais preconizam que o professor delegue ao aluno a maior responsabilidade possível na sua produção científica, na sua aprendizagem. São orientações que devem transformar, dentro das possibilidades, as situações de ensino em situações de aprendizagem.

Brousseau introduz a noção de *situação a didáctica*, na qual destaca o novo papel do professor, com uma actuação mais discreta, mais "apagada". Em Ag Aimouioud, p. 65, encontra-se que:

A situação a didáctica — parte essencial da situação didáctica, é um situação na qual desaparece a intenção de ensinar, mas é específica a do saber. Caracteriza-se pelos seguintes factos:

• O problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, reflectir, evoluir por sua própria iniciativa;

• O professor recusa-se a intervir como aquele que propõe os conhecimentos que ele gostaria de provocar;

• O problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos inteiramente justificados pela lógica interna da situação;

Exemplo 5.1 *Assim, por exemplo, num trabalho sobre a reflexão numa recta, indica-se que uma figura simétrica à outra em relação a uma recta é a que se obtém quando uma dobra na folha da figura é feita sobre o traço da recta.*

Observa-se que uma **situação didáctica** caracteriza-se pela participação do professor nas interacções do aluno com o problema que ele propõe, e a **situação a didáctica**, ao contrário, caracteriza-se pelo afastamento do professor dessas interacções.

A maneira como o aluno é motivado a participar dessa nova situação é explicada pela noção de **devolução**, que Brousseau define como:

"*O acto pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (a didáctica) ou de um problema e aceita ele mesmo as consequências dessa transferência (RDM 9.3, 1990, p. 325)*".

De acordo com Brousseau,

Na didáctica moderna, *o ensino é a devolução ao aluno de uma situação a didáctica correcta e aprendizagem é a adaptação a esta situação (Brousseau, 1986, p. 51).*

Portanto, o ensino tem como objectivo primordial o exercício do conhecimento como produção pessoal do aluno nos seus envolvimentos com um meio a didáctico. A distinção entre situações didácticas e a didáctica e a noção de devolução recolocam novo papel do professor na teoria das situações didácticas.

Nas actividades propostas para os alunos, que serão descritas no próximo item, procuramos provocar a mobilização de seus conhecimentos em investigações que permitam desencadear o processo de elaboração do conceito de reflexões em rectas e reflexões em pontos. Nessas actividades, situações didácticas e a didácticas poderão ser vividas pelos professores e pelos alunos envolvidos.

O meio que o professor tem para pôr em jogo as situações didácticas é dado pelo **contrato didáctico**. Para Brousseau, *"o contrato didáctico é a regra do jogo e a estratégia da situação didáctica" (Brousseau, 1986, p. 50).* A relação que se estabelece, em parte explicitamente e sobretudo implicitamente, o que cada participante do processo educativo, professor e aluno, tem a responsabilidade de gerir, constitui um sistema de obrigações recíprocas que se assemelha a um contrato chamado *contrato didáctico.* O funcionamento desse contrato didáctico depende das escolhas pedagógicas, do tipo de trabalho proposto ao aluno, dos objectivos do ensino etc.

Visando fundamentalmente a aquisição do conhecimento pelos alunos, o contrato didáctico manifesta-se principalmente quando não é respeitado por um dos parceiros da relação didáctica e, em muitos casos, há necessidade de uma ruptura e uma renegociação do contrato para que a aprendizagem se verifique.

Normalmente essa situação ocorre frequentemente, quando solicitamos a turma para alguns trabalhos do tipo: Teste diagnostico, Teste somativo e Exercício que apresenta um elevado grau de dificuldade; etc.

Nessas circunstâncias haverão sempre solicitações e questões do tipo:

- "como começar?"
- "não entendi o que é para fazer";
- "é isto que o exercício pede?";
- "está certo o que eu fiz?"

Nessa situação o contrato tradicional, em que o professor explica a matéria para depois o aluno resolver exercícios sobre o assunto, precisa ser renegociado para se adaptar às novas propostas de trabalho.

Brousseau classifica as situações didácticas em etapas que, no inicio, denominou dialécticas, porque a situação:

"*Evolui no tempo pela sequência de interacções sucessivas de informações e de acções entre o aluno e a situação. (...) Durante essas situações, a criança modifica sua primeira ideia da situação, cria e ensaia um comportamento, um modelo mental, uma linguagem ou uma teoria (Perrin-Glorian, 1990, p. 108)*".

Actualmente, as dialécticas são conhecidas como situaç*ões* de acção, de formulação, de validação e de institucionalização.

A situação de acção ocorre quando o aluno, activamente empenhado na busca da solução de um problema, direcciona a acção para o conhecimento a ser ensinado. Ele passa a agir sobre a situação e esta lhe retoma informações sobre a acção.

Na situação de acção, o aluno organiza estratégias, constrói um "modelo" da situação, que pode ser um conjunto de relações ou regras que o levam a decidir sem que tenha consciência ou saiba explicitar os mecanismos utilizados. Esse processo leva à elaboração, pelo aluno, de um "saber fazer". A situação deve permitir ao aluno um julgamento de sua acção e um processo de ajustamento, sem intervenção do professor, graças à retroacção da situação. O aluno pode abandonar ou melhorar o seu modelo, e a aprendizagem verifica se por adaptação.

A situação de formulação caracteriza-se pela troca de informações entre uma ou várias pessoas. Os alunos agora são emissores e receptores e trocam mensagens escritas ou orais em linguagem informal ou matemática. Nesse momento, o aluno explicita por escrito ou oralmente as ferramentas que utiliza para determinar a solução de um problema proposto.

O objectivo da situação de formulação é a troca de informações e a explicitação de mensagens relativas à interacção com o problema, não tendo intenção de julgar nem validar, embora esses aspectos se possam apresentar na situação. O aluno pode enviar uma mensagem a ele mesmo, o professor pode ser um dos interlocutores, os dois interlocutores podem ser alunos ou grupos de alunos.

Na **situação de validação**, o aluno deve mostrar por que o modelo que criou é válido. O emissor deve justificar a exactidão e pertinência de suas conclusões e, se possível, validá-las. O objectivo principal da situação de validação é a discussão sobre a verdade das asserções que foram formuladas nas fases da acção e da formulação.

Nesta situação, o aluno utiliza a teoria nos debates e nas elaborações de provas para aceitar o que foi formulado em outras etapas. Dificuldades na produção de provas podem ser, nessa fase, consequências de um domínio insuficiente da linguagem.

Na **situação de institucionalização** "fixa-se convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo de um conhecimento ou de um saber" (apud Perrin-Glorian, 1994, p. 126). O novo conhecimento construído e validado passa a ser património da classe, mas não é ainda reconhecido como saber social. Cabe ao professor organizar os conhecimentos para que se tornem referência cultural, universal e não particularizada. É a situação em que:

"*O professor vai permitir ao aluno saber que os conhecimentos utilizados na situação de acção, de formulação e depois de validação, correspondem a saberes reconhecidos (legítimos) que o aluno deverá reutilizar em outras ocasiões que certamente se poderá exigir dele (Perrin-Glorian, 1994, p. 126)*".

Brousseau observa que a institucionalização traz uma mudança no contrato didáctico, pois o aluno deverá saber o conhecimento institucionalizado que o professor irá exigir.

Exemplo 5.2 *Por exemplo, apôs exploração de varias actividades relativamente a reflexões em rectas por meio de procedimentos experimentais e construções, com régua e compasso, é necessário estabelecer a noção de reflexão em recta como transformação no plano, bem como as principais propriedades geométricas relativas a essa transformação.*

5.2.1 A noção de obstáculo

Outro conceito importante no processo ensino/aprendizagem é, segundo Brousseau, o de obstáculo. Nas diversas pesquisas de didáctica, a análise do erro toma como base a noção de obstáculos.

Segundo Guy Brousseau, o erro seria a expressão ou a manifestação explícita de um conjunto de concepções espontâneas ou reconstruídas integradas numa rede coerente de representações cognitivas, que se torna em obstáculo à aquisição de novos conceitos. A superação desses obstáculos seria então o projecto do ensino e o erro a passagem obrigatória.

Um **obstáculo** é um conhecimento, uma concepção, não uma dificuldade ou uma falta de conhecimento (apud Aimouioud, 1997, pp. 38-39).

Os erros são indícios de obstáculos para a aquisição de um conhecimento e, segundo essa visão, são necessários para o professor situar as concepções dos alunos, diagnosticar os obstáculos e adaptar as situações didácticas.

Para Brousseau:

"*Organizar a superação de um obstáculo consistirá em propor uma situação susceptível de evoluir e fazer evoluir o aluno segundo uma dialéctica conveniente. Tratar-se-á não de comunicar as informações que se queira ensinar, mas de encontrar uma situação na qual elas são as únicas a serem satisfatórias ou óptimas*

— entre aquelas às quais se opõem — para obter um resultado no qual o aluno se investiu (Aimouioud, p. 40)".

Vamos citar alguns exemplos que poderão representar obstáculos para os alunos:

Exemplo 5.3 *A concepção de que o eixo de simetria determina na figura duas "metades", que devem-se sobrepor ao imaginar (ou realizar) uma dobra sobre o eixo, poderá constituir um obstáculo para os alunos o caso em que um segmento dado intercepta o eixo de simetria não no seu ponto médio.*

Exemplo 5.4 *Persistir na interpretação "visual" da reflexão em recta, considerando que a imagem de uma figura sempre estará situada "no outro lado da recta", constitui um obstáculo, pois as propriedades geométricas da transformação não estarão sendo consideradas.A dialéctica ferramenta-objecto segundo Régine Douady*

Régine Douady introduziu as noções de ferramenta, objecto, quadros e mudanças de quadros ou jogos de quadros na didáctica Matemática.

Para Douady:

*Um conceito é **ferramenta** quando focalizamos nosso interesse no uso que está sendo feito para resolver um problema. Por **objecto**, entendemos o objecto cultural colocado num edifício mais amplo que é o saber dos matemáticos num dado momento e reconhecido socialmente (1992, p. 134).*

Também Brousseau utiliza na teoria de situações didácticas a noção de ferramenta e objecto, ao considerar que há um duplo processo quando, primeiramente, a cada etapa, a precedente é uma ferramenta que se transforma em objecto de estudo (sentido ferramenta→objecto) e depois esse objecto se transforma em ferramenta nas aplicações dos conhecimentos (sentido objeto→ferramenta).

Para Douady:

*Um **quadro** é constituído de objectos de um ramo da Matemática, de relações entre os objectos, de formulações eventualmente diversas e de imagens mentais associados aos objectos e às relações.*

***Mudança de quadros** é um meio de obter formulações diferentes de um problema, que sem serem necessariamente equivalentes, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas e o funcionamento de ferramentas e técnicas que não se apresentavam na primeira formulação (Douady, 1992, p. 135).*

Isto é, mudar de quadro é utilizar objectos de outro ramo da Matemática para estudar mais uma questão localizada em outro ramo.

As mudanças de quadros ou jogos de quadros provavelmente poderão ser estimulantes para os alunos, pois poderão faze-los progredir nas suas investigações, nas fases de pesquisa e especialmente ligar questões pertinentes ao problema dado.

No caso das transformações geométricas, além do quadro geométrico, pode-se utilizar o quadro algébrico (das estruturas algébricas), o quadro das funções e o quadro numérico (das medidas). Há sub quadros do quadro geométrico, tais como: o pontual, o de grandezas, o de construções com régua e compasso, o de vectores, o de coordenadas (geometria analítica) etc.

Nas actividades a seguir proposta para os alunos do 8° ano sobre reflexões em recta, nas pesquisas e estudos relatados nessa secção, as transformações geométricas serão apresentadas apenas no quadro geométrico, com o uso de sub quadros, como o pontual e o de construções com régua e compasso. Nessas actividades propostas, caso o professor venha tentar adaptá-lo à sua realidade ainda para além desses sub quadros geométricos, poderá trabalhar-se com os seus educandos também no quadro numérico das medidas e no quadro de funções. Pois, na institucionalização realizada depois das actividades, o professor poderá, usar o quadro das funções para definir transformação geométrica como função bijectiva do conjunto de pontos do plano sobre si mesmo.

Exemplo 5.5 *Com a iteração dos domínios geométricos e o de funções, os "deslocamentos" de figuras serão interpretados como funções bijectivas aplicadas a essas figuras.*

Douady propôs uma organização do ensino em várias fases e denominou-a dialéctica ferramenta-objecto.

Na primeira, chamada **fase do antigo**, o aluno mobiliza conhecimentos antigos como ferramentas explícitas para engajar-se num processo de resolução ou resolver, ao menos, parte do problema.

Exemplo 5.6 *Por exemplo, num primeiro momento, a noção de ponto simétrico a outro em relação a uma recta é abordada experimentalmente com a acção de dobrar a folha sobre a recta. Num segundo momento, o aluno é desafiado a investigar as características que determinam quando um ponto é simétrico de outro em relação a uma recta. Para isso, terá de mobilizar noções geométricas conhecidas, como a de distância de ponto a recta, que possam servir de ferramentas na resolução do problema.*

Na segunda fase, chamada **fase de pesquisa**, os conhecimentos dos alunos poderão ser insuficientes para resolver totalmente o problema. Eles formulam conjecturas e são estimulados a usar implicitamente ferramentas novas. Sabem que é algo novo, mas não sabem explicita-lo. Se os conhecimentos de um certo domínio não forem suficientes para a resolução do problema é importante que haja uma mudança de quadro.

Exemplo 5.7 *Por exemplo, estando entendido que característica um ponto simétrico a outro apresenta, o professor propõe ao aluno que investigue um processo de construção do simétrico de ponto. Além do quadro das construções geométricas com régua e compasso, é necessário que o sub quadro das propriedades geométricas seja utilizado na resolução do problema.*

Na terceira fase, a **fase de explicitação**, os alunos têm a possibilidade de descrever os resultados obtidos e justificar o que afirmaram. Esses resultados e a validação dos mesmos são discutidos colectivamente. Diversas concepções poderão surgir, podendo haver conflitos com os antigos, ou ainda gerar erros ou contradições.

Exemplo 5.8 *Por exemplo, na investigação de um processo de construção, com régua e compasso, do simétrico de um ponto em relação a uma recta, os alunos provavelmente descrevem os diferentes processos utilizados, que, ao ser colocados em discussão, podem ser validados ou não. Deve haver debate sobre os conhecimentos antigos e os novos empregues na tarefa.*

Na quarta fase, **fase de institucionalização**, o professor selecciona, de entre os conhecimentos explicitados na fase anterior, aqueles que vão ser descontextualizados e considerados como objectos de saber matemático. Cabe ao professor a tarefa de dar um estatuto de objecto aos conceitos usados como ferramentas. E o novo explícito é destinado a desempenhar mais tarde o papel de antigo.

Exemplo 5.9 *No ensino das transformações geométricas, após a resolução de actividades sobre simetrias, o professor poderá institucionalizar os novos conhecimentos que serão apresentados sob forma de definições, enunciados de teoremas etc.*

A quinta fase, chamada **fase de familiarização**, é aquela em que o professor propõe diversos exercícios que exigem dos alunos o uso, como ferramenta explícita, dos conhecimentos que foram institucionalizados.

Na última fase, **fase de reinvestimento** numa situação nova, o professor propõe problemas mais complexos, nos quais se podem verificar as novas aquisições em funcionamento, ou seja, o novo objecto tornando se antigo, para um novo ciclo da dialéctica ferramenta-objecto.

5.3 Exemplo de aplicação a uma actividade

De seguida, vamos prever uma análise das actividades (teste diagnóstico) propostas na sequência didáctica para os alunos do 1°ciclo (8°ano de escolaridade) e o desempenho dos mesmos, descrevendo, ao mesmo tempo, a maneira como essas fases da dialéctica ferramenta-objecto se apresentaram nas actividades:

Actividades:

Descobrir a simetria ortogonal (ou axial)

a) Numa folha quadriculado marque uma recta d e um ponto P fora dela.

b) Dobre a sua folha quadriculado a partir da recta d marque o ponto coincidente com P.

c) Desdobre a sua folha e nomeie esse ponto de P'.

d) Crie o segmento PP', nomeie de O a intersecção do segmento PP' e da recta d.

e) Compare os segmentos OP e OP'. Qual é a natureza dos ângulos formados pela recta d e o segmento PP'? O que representa a recta d para o segmento PP'?

Definição:

1 - O ponto P' assim construído é o simétrico de P em relação à recta d.

1.1) Qual é o simétrico de P' em relação à recta d? Explique por quê.

2 - Dizemos que os pontos P e P' são simétricos em relação à recta d. A recta d é chamada eixo de simetria.

2.1) Apoiando-se no que você acabou de descobrir, explique a seguinte asserção: "O ponto A' é simétrico de um ponto A em relação a uma recta t.

2.2) Proponha um processo para a construção, com régua e compasso, do simétrico de um ponto M em relação a uma recta r.

Objectivos:

-Elaborar o conceito matemático de ponto simétrico a outro;

-Chegar a algum processo de construção com régua e compasso;

Análise da actividade

Os quatro primeiros itens, (a) até (d), constituem a parte experimental da reflexão em recta, na qual, por dobra no papel, é determinado o ponto simétrico a outro em relação a uma recta. No item (e), são propostas questões fundamentais para chegar ao conceito de ponto simétrico a outro em relação a uma recta, e os itens (1.1) e (2.1) reforçam o conceito. Obtido o ponto P', simétrico de P em relação à recta d, as questões do item (e) levam a observar as principais propriedades desses pontos, tais como, distâncias iguais de P e de P' à recta d, ou, a sua equivalência, o ponto médio O do segmento PP' e d perpendicular a PP'. Podemos concluir que a recta d é mediatriz do segmento PP'. No último item (2.2), há necessidade de determinar algum processo de construção, com régua e compasso, do simétrico de um ponto em relação a uma recta.

Os diversos itens da actividade estabelecem relações e informações que permitem elaborar o conceito e, finalmente, a construção do ponto simétrico a outro em relação a uma recta, mas também prevemos dificuldades nesses itens, pois o teste diagnóstico proposto aos alunos do 1° Ciclo (8° Ano) poderá dificulta-los na analise de relações geométricas entre figuras.

Esta é a primeira actividade em que, além da manipulação da folha (dobragem), é necessário utilizar conhecimentos geométricos na actividade. Nos primeiros itens, até o item (e), observamos a fase do "**antigo**" na dialéctica ferramenta-objecto de Douady, na qual são utilizados conceitos geométricos desenvolvidos nos anos anteriores como, por exemplo, ângulos rectos, rectas perpendiculares e mediatriz de segmento.

No último item (2.2), na elaboração de um procedimento para a construção do ponto simétrico a outro em relação a uma recta, observa-se a segunda fase da dialéctica **ferramenta-objecto** de Douady, chamada de "pesquisa ou novo implícito", na qual novos conhecimentos são colocados em jogo.

Com base nos princípios da dialéctica ferramenta-objecto, é importante usar a mudança de quadros ou domínios. A apreensão dos diversos domínios, das grandezas, das medidas, dos conceitos geométricos e das construções com régua e compasso, permite elaborar a concepção e um processo de construção do simétrico de um ponto em relação a uma recta.

Análise dos resultados

Os quatro primeiros itens provavelmente poderão não dificultar tanto os alunos na resolução, mas o item (e) poderá necessitar de uma exploração mais profunda por parte dos alunos ou de um debate aberto com todos os alunos para que seja respondida a questão sobre o que a recta d representa para o segmento PP'.

Nos restantes itens os alunos poderão enfrentar a imprecisão no uso de conceitos e propriedades geométricos.

Além disso, várias situações didácticas, segundo Brousseau, apresentaram-se nesses itens. Nos cinco primeiros itens, provavelmente o professor poderá notar uma situação de acção. Quando o participante do trabalho "sabe fazer" e aplica algum conhecimento anterior, mesmo sem formulá-lo. A tendência evidencia uma situação de formulação, na qual, se devem descrever relações, propriedades e procedimentos para comunicar ferramentas usadas na solução do problema. Finalmente, no item (2.2), apresenta-se uma situação de validação, pois foi necessário uma justificativa (ou uma prova) de que os procedimentos utilizados na construção levaram à determinação do ponto simétrico de outro em relação a uma recta.

Da nossa experiência como docente e formando da área constatamos em todos os níveis de ensino uma falta de familiarização com a linguagem geométrica. E, de facto, um aspecto que precisa ser trabalhado em todos os níveis de ensino, para que os professores e alunos percebam a importância do uso correcto de termos geométricos e da precisão da linguagem matemática.

CAPÍTULO 6

Análise do Programa e Sugestões Metodológicas.

Neste capítulo vamos ter a oportunidade de fazer uma análise do programa do 1° Ciclo, mais concretamente (Unidade 7 "Isometrias") do programa e livro "Fernandes de Carvalho, Raul – Tronco Comum 8^o Ano, 1^{o}edição – Ministério da Educação Praia (1996)", prever uma proposta do mesmos fazendo alguns ajuste, levando em conta a grelha de analise de Devis, e de seguida sugerir subsidio metodológico baseando em algumas teorias pedagógicas.

6.1 Análise de Programa do 1°Ciclo (Unidade 7 "Isometrias")

A partir da década de 60, as mudanças ocorridas no Ensino Secundário a nível mundial vêm sendo preconizadas em vários países como resultado das novas correntes de pedagogia e educação, por um lado, e por outro na matemática, o movimento da matemática moderna. Em Cabo Verde, vimos surgir mobilizações a partir dos meados da década dos 80 e estendeu-se a década de 90, ao redor de novas ideias, que culminaram com a elaboração de propostas curriculares que incorporaram as reformas pretendidas.

Das inúmeras pesquisas feitas, análise do programa do 1° Ciclo do Ensino Secundário e análise de alguns manuais nomeadamente (Fernandes de Carvalho, Raul – Tronco Comum 8^o Ano, 1^{o}edição – Ministério da Educação Praia (1996), Unidade 7 "isometrias") em Cabo Verde, leva-nos a salientar a importância e a relevância da Geometria, bem como identificar alguns factos, por exemplo, de natureza curricular, que possam justificar quer a notoriedade desta área da Matemática ao longo dos tempos quer um decréscimo que se reconhece no ensino/aprendizagem, em tempos mais recentes.

Partindo da análise de grelha (ver a grelha n°1), constatamos que o ensino da "Unidade Transformação geométrica" está a ser feita no ensino secundário de uma forma muito elementarista; ainda podemos notar que a proposta para a leccionação desses conteúdos atingirá apenas o nível de conhecimento, salvo em alguns casos em que a abordagem poderá atingir o nível de compreensão e de aplicação. Essa abordagem, não permite aos educandos uma coesão entre os conteúdos da referida unidade e uma base sólida e auto-sustentada para estudos posteriores.

Apesar do programa propôr um ensino tendencialmente intuitivo, até então, apesar de existir muitos formandos a nível de matemática, ainda não foram criadas condições visíveis nas escolas para o ensino de transformações geométricas, quer:

- A nível do programa proposto pelos serviços centrais;
- A nível dos docentes da área de matemática;
- A nível de novas tecnologias;

A verdade é que é possível notar algum decréscimo no reconhecimento da importância da Geometria durante, particularmente, a grande mudança curricular ocorrida mundialmente ao longo dos anos 60 do século XX (Palhares [20]): Tratou-se da introdução da chamada "Matemática Moderna", e o decréscimo da importância da Geometria nas estruturas curriculares de todo o mundo ficou patente, e Cabo Verde não foge a regra.

Sentindo-se hoje de forma particularmente intensa (nomeadamente porque estes foram os pressupostos da aprendizagem daqueles que actualmente são docentes), e isto tudo apesar de, formalmente, se ter estado tão somente a lidar com uma substituição de alguns tópicos da geometria (Euclidiana) por outros tópicos de Geometria de (Transformações), tópicos bastante úteis para o ensino da matemática, apesar de não estarem a ser explorado ao fundo no nosso ensino.

Das análises feitas constatamos que curricularmente, seguiu-se um período denominado por "back to basics", segundo Palhares [20], onde, no que diz respeito ao ensino da Matemática, se pode falar num período de realismo: "assistiu-se a uma pressão da sociedade em geral para o ensino de uma Matemática útil e, ao mesmo tempo, assistiu-se ao acréscimo do fenómeno das calculadoras e dos microcomputadores".

Estas forças, combinadas, trouxeram, mais uma vez, como consequência uma redução da importância da Geometria nas nossas escolas, desde de logo porque o ensino da Geometria não deu sinais imediatos de resposta a estas exigência de utilidade e inovação.

É pois urgente e fundamental que a geometria reflicta, porventura, hoje mais do que no passado recente, as preocupações educacionais de relevância e realismo, nomeadamente através de:

-verdadeiros problemas do dia-a-dia que envolvem ideias geométricas, em vez de aplicações artificiais;

-explorações de formas de representação do meio ambiente, por muito complicado que isso pareça. O uso de plantas, de mapas ou de cartografias parece-nos apropriado, uma vez que no mundo onde a criança se movimenta a Geometria é, em primeiro lugar, Espacial, antes de ser Plana;

- trabalhos geométrico com o recurso às novas tecnologias.

"Mas é também igualmente importante e urgente que a Geometria como fonte superabundante de lógica não seja, mesmo ao nível do Ensino Básico Integrado, subordinado a crenças do género de que "aquilo que se vê é o que é verdadeiro", porque, hoje como no passado remoto, a Geometria continua a ser uma fonte de enriquecimento de raciocínio e dos hábitos de pensar que permitem justificar as nossas afirmações" (Palhares [20]).

6.2 Proposta de sugestões metodológicas

O sistema educativo tem sido marcado nos últimos anos por múltiplas e vastas transformações, como resposta à procura de uma educação cada vez mais útil e qualificada para a nossa população, à melhoria da eficácia e eficiência na qualidade do ensino e sua adaptação às necessidades de desenvolvimento de Cabo Verde.

Assim, nossa preocupação assenta-se em contribuir, enquadrando a nossa realidade e contexto social, dentro do tema em estudo acrescentar alguns itens ou conteúdos, que acreditamos permitir e poder facilitar aos educandos uma melhor coesão entre os conteúdos e uma melhor compreensão da referida unidade (ver a grelha n°2).

Segundo a nossa proposta podermos notar, que a nossa preocupação acentua-se mais em organizar os conteúdos de modo a permitir maior coesão e integração entre eles, com a perspectivas de facilitar a compreensão e enriquecer os conhecimentos aos nossos educandos, portanto a abordagem preconizada é tendencialmente intuitiva, baseada na descoberta de algo pelo aluno, isto quer dizer o aluno é o produtor do seu conhecimento.

CAPÍTULO 7

Conclusão e Recomendações

O trabalho ora findo é fruto de uma entrega séria e de um grande esforço para a sua realização. Foi-nos extremamente útil e decisiva nesta fase da nossa careira como formando e docente.

Uma vez que nos proporcionou uma visão mais ampla e oportunidades de reflectir, pesquisar e tirar dividendo sobre o ensino de geometria no ensino secundário (1° ciclo), e perspectivar o reforço da sua presença e estudo nas nossas escolas.

Constatamos a necessidade do reforço de ensino da Geometria no nosso currículo, pois esta reveste-se da maior importância devendo visar o desenvolvimento de uma intuição geométrica e um raciocínio espacial, assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar lógicamente, usar e aplicar a Matemática, formular e resolver problemas abstractos ou numa perspectiva de modelação matemática. Deve ainda desenvolver capacidades de organização e de comunicação quer oral quer escrita. É aconselhável que os estudantes realizem pequenas investigações e façam depois relatórios utilizando linguagem matemática rigorosa (o que não significa que se deva sistematicamente recorrer à linguagem simbólica).

Parece-nos que a manipulação e observação de figuras e modelos geométricos tem um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas que estão em jogo, com prejuízo absoluto do ponto de vista axiomático. O professor deve propôr actividades de construção, de manipulação de modelos ligadas a problemas históricos fazendo surgir a partir do problema e do caminho que se faz para a sua resolução uma grande parte dos resultados teóricos que pretende ensinar ou recordar.

Devem dar-se a conhecer problemas históricos e propôr ao estudante a resolução de pelo menos um. Estamos convicto que é conveniente dar a conhecer um pouco da História da Geometria à qual estão ligados nomes de alguns matemáticos importantes (Euclides, Arquimedes, Newton, Descartes, Euler, Hilbert, entre muitos outros) de modo a permiti-los estabelecer relações entre os elementos internos da própria Matemática – conteúdos escolares – conceitos sociais do seu dia-a-dia.

Somos de opinião que os conhecimentos dos estudantes sobre transformações geométricas devem ser tidos em consideração para serem utilizados e ampliados na resolução de problemas concretos. O professor deve incentivar o esboço de figuras geométricas de modo a tirar proveito da visualização do problema e a desenvolver capacidades de representação. Para além disso, deve apelar-se sempre à descrição, com algum detalhe, do processo utilizado, justificando-o adequadamente.

Parece-nos ser útil apresentar-se aos estudantes problemas que possam ser resolvidos por vários processos (perspectiva sintética, geometria analítica, transformações geométricas, utilização de programas de geometria dinâmica etc.).

Aconselhamos explorar-se sempre que possível, as conexões da Geometria com outras áreas da Matemática e o seu desenvolvimento deve prolongar-se noutros temas.

Estamos cientes que a análise de frisos, pavimentações e empacotamento permite explorar transformações geométricas, áreas e volumes e efectuar estimativas.

Somos também de convicção que uma parte significativa de professores não tiveram a oportunidade de estudar ou aprofundar conhecimentos sobre Transformação Geométrica, uma vez que até então não existe nenhuma cadeira no curso e formação de professores em ensino da matemática em Cabo Verde que faça uma abordagem laboral e profunda de estudos das transformações geométricas; pois vimos que se trata de uma unidade jovem no ensino secundário que começa a ser introduzida nos currículos oficiais mundial a partir da década de 6o.

Hoje mais de que nunca em Cabo Verde, fala-se muito da mudança curricular esperamos que essas mudanças venham ao encontro as expectativas da sociedade cabo-verdiana, umas vez que se verifica uma elevadíssima queixa de falta de qualidade do ensino no Pais e uma reclamação constante de um numero significativo de professores, da ausência da geometria nos currículos escolares.

Acreditamos que todos nós, cientes das lacunas averiguadas pela sociedade que a formação de futuros professores de Matemática deve atender aos vários aspectos que envolvem o ensino das transformações geométricas, suas dimensões geométricas e algébricas, mas, ao mesmo tempo, acompanhar as pesquisas didácticas, as analises de currículos escolares e de livros didácticos, estimulando nos professores atitudes investigadoras sobre as concepções de seus alunos e outra vertentes de modo a responder as demandas das nossa sociedade.

A exploração de programas informáticas ou computacionais pode ajudar eficazmente o estudante e não só como também o próprio docente, a desenvolver a percepção dos objectos do plano e do espaço e a fazer conjecturas acerca de relações ou acerca de propriedades de objectos geométricos.

Finalizando, destacamos que o nosso trabalho é uma parte do que é necessário desenvolver sobre as transformações geométricas, no ensino da geometria. Um aspecto muito importante, não abordado no nosso trabalho e que deve ser objecto de estudos em trabalhos futuros, é o uso de novas tecnologias para o ensino das transformações geométricas no ensino secundário. Será um dos próximos passos do nosso projecto.

CAPÍTULO 8

Referências Bibliográficas

[1] Alves Magda - Como Escrever Teses e Monografia (Um roteiro passo a passo) - Edição "Campus".

[2] Audirac J. Louis / Boudot Jeanne – 1^e S_{et} Geometrie Statistiques – Programme (1982).

[3] Abrantes Paulo / Carvalho Raul – M7 (Exercício de Matemática 7° ano) – Texto Editora. Lisboa (1986).

[4] Bondem, Alain – La fascination des groupes, OCDL, Paris, (1980) ;

[5] Brun, Jean (Direcção de Jean Brun) – Didáctica das matemáticas, Horizontes Pedagógicas, Instituto Piaget, (1996).

[6] Brousseau, G – Fundamentos e Métodos da didáctica da Matemática, in [5].

[7] De Oliveira, A.J. Franco – Transformações Geométricas; Universidade Aberta, Lisboa, (1995)..

[8] De Amorim, Diogo – Compêndio de Geometria – Edição Saciedade Portuguesa de Matemática.

[9] Fernandes de Carvalho, Raul – Tronco Comum 8^o Ano, 1^oedição – Ministério da Educação Praia (1996).

[10] G. Calado, J. Jorge – Compendio de Aritmética Racional (3° ciclo), Edição Maranus, (1957)

[11] Hilbert, David - Fundamentos da Geometria – Gradiva, Trajecto Ciência n^o 6. (Tradução de Pilar Ribeiro, Silva Paulo, Paulino Fortes, sob a supervisão de Franco Oliveira).

[12] http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao_setsuko_mabuchi.pdf.

[13] Lima Yolanda / Gomes Francelino – Xeq Mat – Matemática 12^o; Editorial o Livro, Lisboa.

[14] Domingos M. Engrácia / Correia M. Cerqueira / Fernandes Télio – Eu e a Matemática – Livro de Consulta 1, 7° Ano de Escolaridade Edições ASA..

[15] Eves Howard. 1995. Introdução à Hist6ria da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp.

[16] MEVRH (1990); Plano de Organização do Ensino – Aprendizagem. Programa de Matemática – 1^o Ciclo do Ensino Secundário. República de Cabo Verde: F. Calouste Gulbenkian.

[17] MEVRH (1990). Lei de Bases do Sistema Educativo. Lei n^o 103/III /90, de 29 de Dezembro. República de Cabo Verde: F. Calouste Gulbenkian.

[18] Neves M. Augusta / Vieira M. Teresa / Alves Alfredo – Exercícios de Matemática – 7° Ano de Escolaridade. Porto Editora.

[19] Nathan Fernand – Mathematique 3e Serie Rouge – Edition Conforme à la Circulaire n° 73087 du 19 Février (1973).

[20] Palhares Pedro, Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico, Lidel, edição técnicas, Lda.

[21] Sociedade Portuguesa de Matemática, Boletim n^o 46– Abril (2002).

[22] Serrano, Pedro – Redacção e Apresentação de trabalhos Científicos; Relógio D'agua.

[23] Ventura Araújo, Paulo – Curso de Geométrico, Gradiva, Lisboa, (1998).

[24] Verschueren, Luc – Toutes les Mathématiques, edição ellipses (2004).

[25] Organização Curricular do Ensino Secundário e Programas do 1° Ciclo -Tronco Comum. Cabo Verde Junho de 1994.

[26] www.google.pt, frisos /Rosáceas /Pavimentações aplicações artistico-24/08/07: 14H10mn.

CAPÍTULO 9

Glossário de termos utilizados:

Axioma: são certas proposições evidentes que se admitem sem justificação, ou seja, que não é deduzida de outras e que, conjuntamente com definições, serve de ponto de partida às teorias matemáticas.

Ângulo: é uma porção do plano limitado por duas rectas (semi-rectas) de origem comum.

Bijecção: é uma aplicação injectiva e sobrejectiva.

Corolário: é um teorema que é uma consequência quase imediata de outro teorema.

Demonstração: justificação da solução de um problema segundo uma sequencia lógica.

Elemento geométricos: dá-se o nome de elementos geométricos aos pontos, rectas e planos.

Figura planas: são aquelas em que todos os seus pontos existem no mesmo Plano

Figuras geométricas: são aquelas em que todos os seus pontos existem no mesmo plano.

Geometria: é a ciência que estuda as propriedades de certas figuras quanto a forma, extensão e posição relativas.

Geometria Plana: é a parte da geometria que estuda as figuras planas.

Isomorfismo: duas estruturas algébricas (A, θ) e (B, ϕ) são isomorfas se existir uma aplicação bijectiva $f : A \to B$ tal que $f(a\theta b) = f(a)\phi f(b)$, $\forall a, b \in A$, isto é o isomorfismo que aplica A em B e transforma uma operação noutra.

Lema: é uma proposição preliminar que facilita a demonstração de um teorema.

Postulado: proposição que se admite sem demonstração.

Polígono regular: polígono que tem os lados e os ângulos internos iguais.

Preposições: são postulados (afirmações), que se admitem sem justificações. Actualmente é dado o nome de axiomas.

Teorema: são proposições não evidentes cuja verocidade exige ser demonstrado que, por raciocínio lógico, se deduz a partir de axiomas ou outros teoremas, previamente demonstrado.

Termos Primitivos: termos que não são definidos a partir de outros termos.

Por exemplo, em Geometria, o ponto, a recta e o plano são termos primitivos.

Unívoca (Correspondência): dados dois conjuntos A e B, a correspondência que a cada elemento de associa um e só um elemento de B, diz-se correspondência unívoca ou função de A em B.

CAPÍTULO 10

Anexo

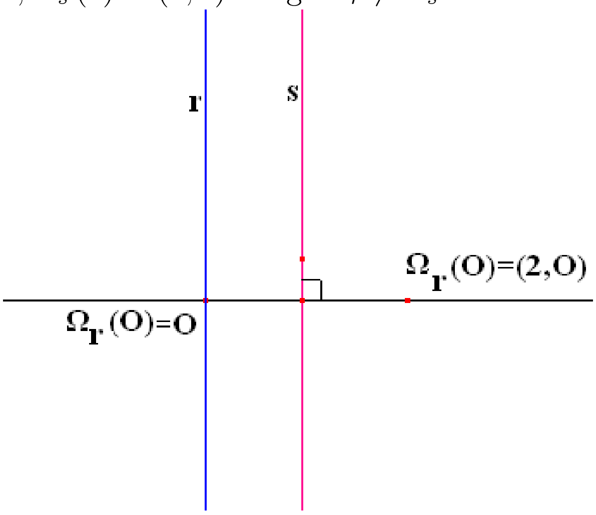
10.1 Exercícios Resolvidos:

1) Diga, justificando com um contra-exemplo ou uma demonstração, conforme o caso, se são verdadeiras ou falsas as proposições seguintes, relativas ao plano euclidiano real $\mathbb{R}^2$:

a) Se r, s são rectas paralelas distintas, então $\Omega_r = \Omega_s$;

Resolução:

A afirmação é falsa. Tomando, por exemplo, r como sendo a recta de equação $x = 0$ e s como sendo a recta de equação $x = 1$, e centro O a origem, tem-se $\Omega_r(0) = 0$, $\Omega_s(0) = (2, 0)$. Logo $\Omega_r \neq \Omega_s$.



b) Se r, s são rectas paralelas distintas, então toda a perpendicular a r é perpendicular a s;

Resolução:

A afirmação é verdadeira. Se r, s são rectas paralelas distintas, então $r = P + \overrightarrow{v}$ e $s = Q + \overrightarrow{v}$ com $P \neq Q$ e $v \neq 0$. Por outro lado, duas rectas são perpendiculares se e só se os vectores directores respectivos forem ortogonais. Como r e s têm igual direcção então toda a perpendicular a r é perpendicular a s.

c) Se uma isometria Γ fixa uma recta r, então Γ é a reflexão em r;

Resolução:

A afirmação é falsa. Seja $r = P + \overrightarrow{v}$, $v \neq 0$. Então $\tau_v(r) = r$ e, no entanto, $\tau_v \neq \Omega_r$.

d) Se uma isometria Γ fixa pontualmente duas rectas (distintas), então Γ é a identidade.

Resolução: A afirmação é verdadeira. Se Γ fixa pontualmente duas rectas distintas então Γ fixa, pelo menos, 3 pontos não colineares, dois sobre uma das rectas e terceiro sobre outra, $\Gamma = Id$. ver proposição 3.11.

2) Sabendo que $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\,sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ e $S_\phi = \begin{bmatrix} \cos 2\phi & sen2\phi \\ sen2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}$, diga o que representam estas matrizes e mostre que $R_\theta S_\phi$ representa uma reflexão Ω_r numa recta r passando pela origem;

a) No caso $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{3\pi}{2}$, determine a recta r.

Resolução:

R_θ representa uma rotação em torno da origem de ângulo θ, no sentido positivo, e S_ϕ uma reflexão na recta passando pela origem com o versor $v = (\cos\phi,\ sen\phi)$, isto é, na recta $r = (0,0) + \langle(\cos\phi,\ sen\phi)\rangle$. Ora

$$(x,y) \in r \Leftrightarrow (x,y) = \lambda(\cos\phi,\ sen\phi) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda\cos\phi \\ y = \lambda\ sen\phi \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x}{\cos\phi} \\ y = \frac{sen\phi}{\cos\phi}x = (tg\phi)\,x \end{cases} \quad se\ \phi \neq \frac{\pi}{2}$$

No caso de $\phi = \frac{\pi}{2}$, $r = (0,0) + \langle(0,1)\rangle$ é a recta $x = 0$. Em conclusão, S_ϕ representa uma reflexão na recta

$$R_\theta\ S_\phi = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & sen2\varphi \\ sen2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos 2\varphi - sen\theta sen2\varphi & \cos\theta sen2\varphi + sen\theta\cos 2\varphi \\ sen\theta\cos 2\varphi + \cos\theta sen2\varphi & \cos\theta sen2\varphi - \cos\theta\cos 2\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta+2\phi) & sen\,(\theta+2\phi) \\ sen\,(\theta+2\phi) & -\cos(\theta+2\phi) \end{bmatrix} = S_{\frac{\theta+2\phi}{2}} = S_{\frac{\theta}{2}+\phi}$$

representa uma reflexão na recta de equação
$$\begin{cases} y = \left(tg\left(\frac{\theta}{2}+\phi\right)\right)x & se\ \frac{\theta}{2}+\phi \neq \frac{\pi}{2} \\ x = 0 & se\ \frac{\theta}{2}+\phi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

b) Sendo s a recta da equação $x = 0$ e t a recta de equação $y = -x$, determine um recta l tal que $\Omega_t\Omega_s\Omega_r = \Omega_l$.

Resolução:

No caso $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{3\pi}{4}$ temos que $\frac{\pi}{2} + \phi = \pi$ e $tg\pi = 0$.Logo r é a recta de equação $y = (tg\pi) = 0$.

3) Diga se são verdadeiras ou falsas as asserções seguintes, justificando com uma demonstração ou um contra-exemplo, conforme o caso:

a) As reflexões comutam com as translações;

Resolução:

A afirmação é falsa. Por exemplo, se Ω é uma reflexão no eixo dos xx e τ é a translação definida por $v = (1,1)$ e $P = (2,0)$ então $\tau P = \Omega((2,0)+(1,1)) = \Omega(3,1) = (3,-1)$ $\tau\Omega P = \tau(2,0) = (2,0)+(1,1) = (3,1)$ e $(3,1) \neq (3,-1)$

b) As reflexões numa recta comutam com as translações ao longo dessa recta;

Resolução:

A afirmação é verdadeira. Se l é uma recta sabemos que $\Omega_l\tau_l$ e $\tau_l\ \Omega_l$ são reflexões deslizantes ao longo da recta l e coincidem.

c) Uma isometria sem pontos fixos é uma translação ou uma reflexão deslizante;

Resolução:

A afirmação é verdadeira. Podemos mesmo afirmar que toda a translação ou reflexão deslizante em causa são não triviais.

4) Prove que: Uma Isometria não pode ter exactamente dois pontos fixos;

Resolução:

Uma isometria que tenha dois pontos fixos não pode ser uma reflexão (pois esta fixa todos os pontos do seu eixo), nem uma translação não trivial (que não tem pontos fixos), nem uma rotação não trivial (que tem um único ponto fixo), nem uma reflexão deslizante não trivial (que não tem pontos fixos), e também não pode ser a identidade (que fixa todos os pontos). Logo tal isometria não existe - ver teorema de classificações das isometrias em termos dos pontos invariantes.

5) Diga, justificando com uma breve demonstração ou um contra-exemplo, conforme o caso, se as seguintes asserções são verdadeiras ou falsas:

a) Se cada uma das duas rectas perpendiculares são fixas pela isometria Γ, então $\Gamma = I_d$ (identidade);

Resolução:

A afirmação é falsa. Se $r \perp s$ então $\Omega_r(r) = r$ (fixa pontualmente, pois é o eixo da reflexão) e $\Omega_r(s) = s$ (por definição de reflexão)

b) Se uma transformação Γ de $\mathbb{R}^2$ transforma segmentos em segmentos e qualquer triângulo num triângulo congruente, então Γ é uma isometria;

Resolução:

A afirmação e verdadeira. Ora Γ é uma isometria sse Γ preserva a distância. Assim dados P, Q dois pontos quaisquer teremos de provar que $d(P,Q) = d(P', Q')$, ou equivalentemente que $\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'}$ para $P' = \Gamma(P)$, $Q = \Gamma(Q)$. Seja $R \notin \overleftrightarrow{PQ}$. Então podemos considerar $\triangle PQR$. Supondo $R = \Gamma(R)$ então, atendendo a hipótese, $\Gamma(\triangle PQR) \equiv \triangle PQR$.

Por outro lado, $\Gamma(\triangle PQR) = \Gamma(\overline{PQ} \cup \overline{QR} \cup \overline{RP}) \supseteq \overline{P'Q'} \cup \overline{Q'R'} \cup \overline{R'P'} = \triangle P'Q'R'-$ pois P', Q', R' não são colineares e, logo, $\Gamma(\triangle PQR) = \triangle P'Q'R'$. Portanto $\triangle PQR \equiv \triangle P'Q'R'$ e, em particular, $\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'}$, como se pretendia.

c) Se Δ é um triângulo isósceles, então a reflexão numa mediana (um segmento de um vértice para o ponto médio do lado oposto) é uma simetria de Δ.

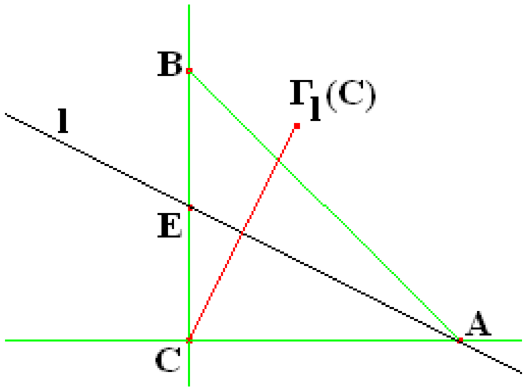
Resolução:

A afirmação e falsa. Basta considerar um triângulo isósceles que não seja equilátero

digamos $\triangle ABC$ de base $\overline{AB}$. Logo $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$. Seja E o ponto médio de $\overline{BC}$ e seja $l = \overleftrightarrow{AE}$.

Então Ω_l não é uma simetria de $\triangle ABC$. De facto $\measuredangle AEB$ e $\measuredangle AEC$ não são ângulos rectos: se $\measuredangle AEB$ e $\measuredangle AEC$ fossem rectos então como também $\overline{AE} \equiv \overline{AE}$ (reflexividade) e

$\overline{BE} \equiv \overline{CE}$ (definição de ponto médio) viria, pelo caso LAL, $\triangle AEB \equiv \triangle AEC$; em particular $\measuredangle B \equiv \measuredangle C$ e, pelo recíproco do teorema do triângulo isósceles, $\overline{AC} \equiv \overline{AB}-$ absurdo pois $\triangle ABC$ não é equilátero. Segue-se que $\Omega_l(B) \neq C$ o que mostra que Ω_l não é uma simetria de $\triangle ABC$.



6) Seja Γ uma isometria. Mostre que:

a) Se $\Gamma \neq I_d$ então é uma reflexão Ω tal que Ω_Γ tem um ponto fixo.

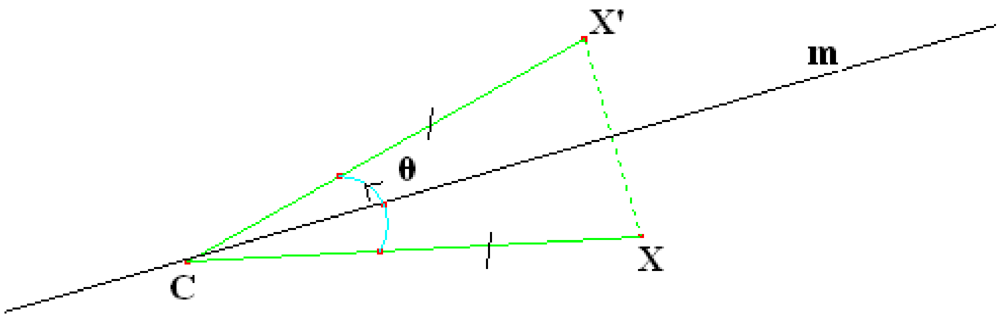
Resolução:

Se $\Gamma \neq I_d$, existe um ponto P tal que $\Gamma(P) = Q \neq P$. Seja $m = m_{\overline{PQ}}$ e seja $\Omega = \Omega_m$. Então $\Omega_\Gamma(P) = \Omega(Q) = P$, donde Ω_Γ tem um ponto fixo.

b) Se Γ é uma rotação não trívial então existe uma reflexão Ω tal que Ω_Γ é uma reflexão.

Suponhamos que $\Gamma = \Theta_{c,\theta} \neq Id$. Então $\Gamma(C) = C$. Seja $X \neq C$. Logo, $\Gamma(X) = X' \neq X$. Seja $m = m_{\overline{XX'}}$ seja $\Omega = \Omega_m$. Por definição de rotação de centro C, $\overline{CX} \equiv \overline{CX'}$ e portanto, $C \in m$. Assim, temos

$\Omega_\Gamma(C) = \Omega(C) = C, \quad \Omega_\Gamma(X) = \Omega(X') = X.$



logo, Ω_Γ tem dois pontos fixos e não é identidade:

$\Omega_\Gamma = Id \Rightarrow \Gamma = \Omega^{-1}$ (onde Γ é uma rotação e Ω^{-1} é uma reflexão) -impossível. Portanto, Ω_Γ é uma reflexão.

7) Sejam r e s duas rectas de $\mathbb{R}^2$.

a) Suponha que $\Omega_r\Omega_s = \tau_v$ para algum vector v. Mostre que v é um vector normal a r e a s.

Resolução:

a) Como, $\Omega_r\Omega_s = \tau_v$ então $r \parallel s$. Assim, suponhamos que

$$r = P + \overrightarrow{u} \qquad , \qquad s = Q + \overrightarrow{u}, \;\; u \neq 0.$$

Então

$$Q+v = \tau_v(Q) \underset{hip}{=} \Omega_r\Omega_s(Q) \underset{Q\,\in\,s}{=} \Omega_r(Q) \text{ donde } v = \Omega_r(Q) - Q =$$
$\overrightarrow{Q\Omega_r(Q)}$. Mas, por definição de reflexão, r é a recta mediatriz do segmento $\overline{Q\Omega_r(Q)}$. Logo $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{Q\Omega_r}(Q)$ é normal à recta r . Como $r \parallel s$ também $\overrightarrow{v}$ é norma à recta s.

b) Determine duas rectas r e s tais que $\Omega_r\Omega_s(x, y) = (x + 1, y - 3)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Resolução:

Temos que

$$\Omega_r\Omega_s(x, y) = (x + 1, y - 3) = (x, y) + (1, -3) = \tau_{(1,-3)}(x, y)$$
para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde $\Omega_r\Omega_s = \tau_{(1,-3)}$. Pela alínea a), $v = (1, -3)$ é normal a r e a s.

Logo r e s têm a direcção do vector $(3, 1)$.

Seja $Q \in s$. Então

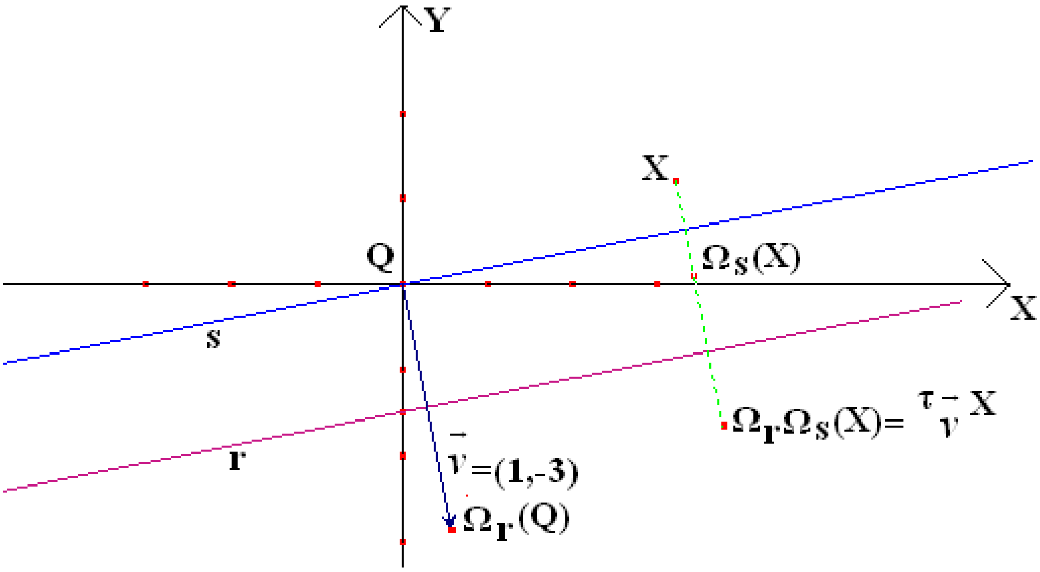
$$\Omega_r(Q) = \Omega_r\Omega_s(Q) \underset{hip}{=} \tau_v(Q) = Q+v = Q+(1, -3)$$

e r passa pelo ponto médio M do segmento $\overline{Q, Q + (1, -3)}$.Ora

$$M = \tfrac{Q\,+\,Q\,+\,(1,-3)}{2} = Q + \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}\right).$$

Logo, $r = Q + \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) + \langle(3, 1)\rangle$. Portanto, se tomarmos $Q = (0, 0)$ obtemos

$$r = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}\right) + \langle(3, 1)\rangle, \qquad s = (0, 0) + \langle(3, 1)\rangle$$



10.2 Exercícios Propostos

8) Diga, justificando com uma breve demonstração ou um contra-exemplo, conforme o caso, se as seguintes asserções são verdadeiras ou falsas:

a) As únicas isometrias involutivas são reflexões.

b) Dadas três rectas r, s, l existe uma recta m tal que $\Omega_r\Omega_s = \Omega_l\Omega_m$.

9) Considere a isometria $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\Gamma(0,0) = (2,0)$, $\Gamma(2,0) = (0,0)$ e $\Gamma(1,1) = (1,-1)$.

a) Mostre que o ponto médio M do segmento $\overline{PQ}$, onde $P = (0,0)$, $Q = (2,0)$, é um ponto fixo de Γ.

b) Mostre que Γ é uma rotação e indique o centro e o ângulo da rotação. Justifique.

c) Escreva Γ como um produto de duas reflexões.

d) Determine a expressão geral de Γ.

10) Considere a translação τ_v onde $v = (1,2)$ e a reflexão Ω_l onde l é a recta definida pela equação cartesiana $x + y = 2$.

a) Determine a expressão analítica de Ω_l.

b) Determine um triângulo Δ tal que Ω_l seja uma simetria de Δ.

c) Determine uma aplicação ortogonal Γ e uma translação τ_u tais que Ω_l $\tau_v = \tau_u \Gamma$.

d) Classifique detalhadamente a isometria $\Omega_l \tau_u$.

11) Diga, justificando com uma breve demonstração ou um contra-exemplo, conforme o caso, se as seguintes asserções são verdadeiras ou falsas:

a) Qualquer isometria de forma τ_Θ, onde τ é uma translação não trivial e Θ é uma rotação não tem pontos fixos;

b) Duas rotações distintas Θ_1 e Θ_2 comutam, isto é, $\Theta_1\Theta_2 = \Theta_2\Theta_1$.

c) Qualquer transformação uma recta r numa recta paralela a r.

12) Considere a transformação Γ de $\mathbb{R}^2$ definida por

$\Gamma\,(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - y + 2\sqrt{2}, x + y - 4 + 2\sqrt{2}\right).$

a) Mostre que Γ é uma isometria.

b) Determine os pontos fixos de Γ, isto é, resolva a equação $\Gamma X = X$, onde $X = (x,y)$ e conclua (justificando) que Γ é uma rotação.

13) Considere uma aplicação Γ do plano cartesiano real em si mesmo.

a)Diga quando é que Γ é uma transformação do plano: uma aplicação linear; uma aplicação ortogonal; uma isometria. Quais as implicações lógicas entre estes conceitos?

b) Considere a aplicação $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por

$\Gamma\,(x,y) = (2x, y)\,.$

De acordo com a), classifique Γ.